

Квант

2

ФЕВРАЛЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Главный редактор — академик **И. К. Кикоин**
Первый заместитель главного редактора — академик **А. Н. Колмогоров**

Редакционная коллегия:

Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский,
И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов,
П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (зам. главного редактора),
А. И. Маркушевич, М. Д. Миллиончиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий,
М. Л. Смолянский (зам. главного редактора), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.



На первой странице обложки помещена фотография к статье А. С. Варпаховского и А. Н. Виленкина «Снежные кристаллы» [фото А. Н. Виленкина]. Статья помещена на стр. 32.

На четвертой странице обложки помещены графки показательной и экспоненциальной функции.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова Главный художник А. И. Климаков
Художественный редактор О. Н. Яковлева Корректор А. Л. Илатова
Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117912 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. Тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 28/XI-71 г. Подписано в печать 28/XII-71 г. Бумага 70×100¹/₁₆.
Лез. печат. 46. Усл. печ. л. 5.85. Уч.-изд. л. 6.43. Тираж 336 935 экз. Т-16897. Цена 30 коп. Зак. 2132.
Издательский полиграфический комбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете
Министров СССР, г. Москва, Московской обл.

Рукописи не возвращаются



НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

- | | | |
|-----------|--|------------------------|
| <u>2</u> | Отношения эквивалентности и разбиения множеств | <i>М. М. Глухов</i> |
| <u>10</u> | Вода на Луне | <i>М. А. Гинцбург</i> |
| <u>16</u> | Переключательные схемы | <i>Р. В. Фрейвальд</i> |
| <u>20</u> | Измерение скорости света | <i>В. Винецкий</i> |
| <u>26</u> | Иррациональность суммы радикалов | <i>Л. Н. Камнев</i> |
| <u>28</u> | Радиоактивная память | <i>В. И. Кузнецов</i> |

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- | | | |
|-----------|-------------------|---|
| <u>32</u> | Снежные кристаллы | <i>А. С. Варпаховский,
А. Н. Виленкин</i> |
|-----------|-------------------|---|

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- | | | |
|-----------|-------------------------|---------------------------------------|
| <u>36</u> | Площади многоугольников | <i>П. Р. Кантор,
Ж. М. Раббот</i> |
|-----------|-------------------------|---------------------------------------|

«ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- | | | |
|-----------|---------------------------------|--|
| <u>42</u> | Задачи | |
| <u>44</u> | Решения задач: М84—М88; Ф92—Ф99 | |

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- | | | |
|-----------|---|----------------------|
| <u>54</u> | Методы расчета эквивалентных сопротивлений | <i>А. Хацет</i> |
| <u>60</u> | Пирамида и сфера | <i>Ю. В. Сидоров</i> |
| <u>65</u> | Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года. | |

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

- | | | |
|-----------|---|---|
| <u>67</u> | О книжке Пойя «Математическое открытие» | <i>М. Л. Смолянский,
Ю. А. Гастев</i> |
|-----------|---|---|

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

- | | | |
|-----------|---|-----------------------|
| <u>70</u> | Марки, посвященные международным геофизическим научным программам | <i>А. В. Альтыкис</i> |
|-----------|---|-----------------------|

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

- | | | |
|-----------|--|---------------------|
| <u>71</u> | «КВАНТ» для младших школьников (3-я стр. обл.) | <i>А. П. Савин,</i> |
|-----------|--|---------------------|

СМЕСЬ

- | | | |
|-----------|---|--------------------------|
| <u>25</u> | Задачи о прямых линиях | <i>В. М. Розентуллер</i> |
| <u>31</u> | Задачи арифметические и алгебраические | |
| <u>41</u> | Симпозиум юных математиков (Горький) | |
| <u>53</u> | Симпозиум юных математиков (Тбилиси) | |
| | Графики показательных функций (4-я стр. обл.) | |

М. М. Глухов

Отношения эквивалентности и разбиения множеств

Попробуйте представить себе все многообразие смысловых оттенков слова «класс»: «рабочий класс», «ученик 10-го класса», «каюта 1-го класса», «класс млекопитающих» ... Сколь различными ни казались бы эти оттенки, слово «класс» во всех случаях имеет одно и то же происхождение — оно всегда связано с *классификацией*, или *разбиением*, какого-либо множества на непересекающиеся классы. Понятие «класс» и его многочисленные сородичи (семейство, тип, категория, вид, сорт, род, разряд и другие) широко используются буквально во всех областях человеческой деятельности. Например, когда нам требуется изучить объекты какому-нибудь множества в связи с какими-нибудь их свойствами, мы стремимся разбить это множество на классы так, чтобы все элементы одного класса вели себя одинаковым образом по отношению к интересующим нас свойствам, и тогда появляется возможность изучать целый класс объектов по одному его представителю.

Так, биологи изучают не каждое растение в отдельности, а разбивают все растения на классы, семейства, роды и виды, так что при изучении, скажем, семейства лютиковых один цветок выступает как представитель целого семейства (или вида). При изучении класса по его представителю последний обычно стараются выбрать наиболее простым с точки зрения других (не интересующих нас в данный момент) свойств. Каждый из вас неоднократно пользовался такой возможностью, например, при решении уравнений, заменяя одно уравнение другим, более простым, но имеющим те же корни, то есть содержащимся в классе уравнений, равносильных данному.

Для разбиения множества, то есть для такого распределения его элементов по классам, при котором каждый элемент попадает в один и только один класс, обычно используют различные признаки, присущие элементам данного множества. Например, предметы, изображенные на ри-

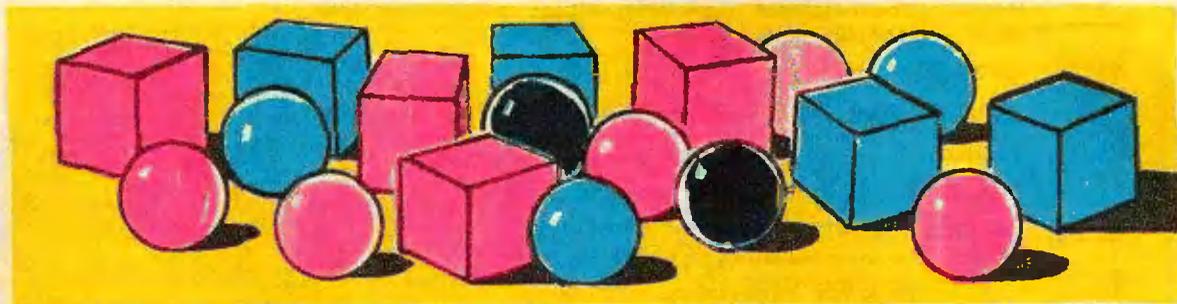


Рис. 1.

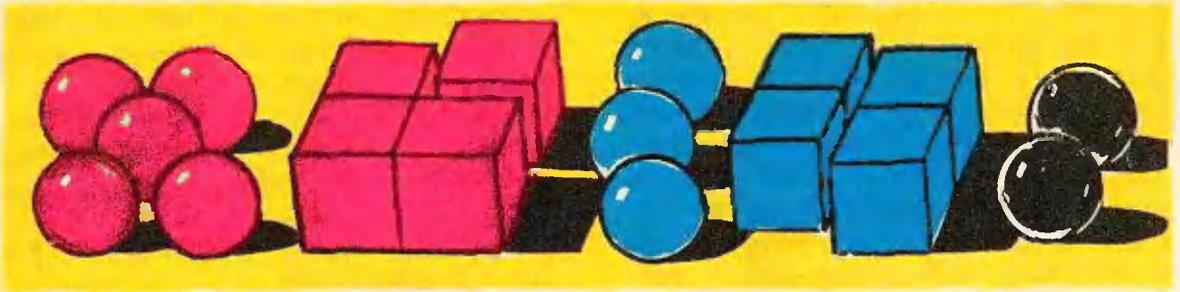


Рис. 2, а

сунке 1, можно разбить на классы по цвету (рис. 2, а), по форме (рис. 2, б) или по какому-нибудь другому признаку. Впрочем, для разбиения множества на классы нам нужны не столько свойства, присущие каждому элементу в отдельности, сколько правила, указывающие, в один или в разные классы следует отнести два произвольно выбранные элемента данного множества. Например, все прямые плоскости можно разбить на классы, если договориться две прямые относить в один класс в том и только в том случае, когда они параллельны. В полученном разбиении любые две (не обязательно различные *) прямые одного класса параллельны, а любые две прямые из разных классов не параллельны. В этом примере мы пользуемся не признаком, которым обладает или не обладает каждая отдельно взятая прямая, а свойством, относящимся к парам прямых (прямые a и b параллельны или не параллельны). Про построенное разбиение прямых говорят, что оно индуцировано отношением парал-

*) Иначе говоря, мы уславливаемся считать, что каждая прямая параллельна самой себе.

лельности. О рассмотренных выше разбиениях предметов рисунка 1 также можно сказать, что они индуцированы некоторыми отношениями. Так, разбиение по цвету индуцировано отношением «иметь одинаковый цвет».

Вместе с тем, не всякое отношение между элементами множества индуцирует разбиение этого множества на классы. Например, если бы мы попытались всех людей распределить по непересекающимся группам так, чтобы любые два человека одной группы уважали друг друга, а два человека из разных групп не уважали бы или не знали друг друга, то, очевидно, из этой затеи ничего бы не вышло.

Проверьте, будет ли отношение перпендикулярности индуцировать разбиение всех прямых плоскости.

Чтобы выяснить и точно сформулировать условия, при которых отношение между элементами множества индуцирует разбиение этого множества на классы, уточним сначала само понятие отношения.

Что такое отношение?

Начнем с того, что вспомним некоторые знакомые отношения. Так, в школьной математике вам часто



Рис. 2, б

встречались отношение равенства (чисел, фигур, функций), отношения «больше» и «меньше» для чисел, отношение делимости для целых чисел, отношения параллельности и перпендикулярности для прямых и многие другие. В повседневной жизни распространены отношениями между людьми являются отношения старшинства, родства, соседства, товарищества, принадлежности к одной нации, профессии.

Теперь рассмотрим внимательнее в какое-нибудь одно отношение, например, в отношение равенства чисел. Числовые равенства бывают верные (истинные) и неверные (ложные). Например, равенство $5 = 5$ верно, а $5 = 2$ неверно. Если же x_1 и x_2 — неизвестные числа, то равенство $x_1 = x_2$ (высказывание « x_1 равно x_2 ») не имеет определенного значения: оно зависит от «неизвестных» x_1, x_2 , является их функцией: при каждом конкретном числовом значении x_1, x_2 оно будет истинным или ложным.

В общем случае отношением бинарным (или двуместным*) на множестве M мы будем называть высказывание об элементах множества M , зависящее от двух переменных и превращающееся в истинное или ложное высказывание при подстановке в него вместо переменных любых конкретных элементов из M . Обычно отношение записывают в виде $x_1 \Theta x_2$ ($x_1 = x_2, x_1 < x_2, x_1 \parallel x_2, x_1 \perp x_2$ и т. п.). Часто вместо «отношение $x_1 \Theta x_2$ » говорят просто «отношение Θ ». Например, вместо «отношение $x_1 = x_2$ » мы говорим «отношение равенства». Аналогичный смысл имеют термины «отношение порядка», «отношение параллельности», «отношение соседства» и т. п. Если отношение $a \Theta b$ истинно, то говорят также, что a и b связаны отношением Θ или находятся в отношении Θ . Если отношение Θ обладает тем свойством, что из истинности $a \Theta b$ всегда следует истин-

ность $b \Theta a$, то оно называется *симметричным*. (В дальнейшем мы будем иногда называть симметричность «свойством 1».) Например, отношения параллельности и перпендикулярности прямых симметричны, а отношение $<$ на множестве действительных чисел не симметрично ($5 < 8$ истинно, а $8 < 5$ ложно).

Отношение Θ на множестве M называется *рефлексивным* («свойство 2»), если $a \Theta a$ истинно для любого элемента a из M , и *транзитивным* («свойство 3»), если из истинности $a \Theta b$ и $b \Theta c$ следует истинность $a \Theta c$. Например, отношение равенства чисел рефлексивно и транзитивно, отношение перпендикулярности прямых не рефлексивно и не транзитивно, а отношение «меньше» для чисел транзитивно, но не рефлексивно.

З а д а ч а. Выясните, какими из свойств 1—3 обладают отношения делимости для целых чисел, отношение «пересекаться» (то есть иметь хотя бы одну общую точку) для прямых плоскости и отношение соседства для людей.

Отношения эквивалентности

Вернемся теперь к интересующему нас вопросу: какие отношения, определенные на некотором множестве M , индуцируют разбиения этого множества на классы? Иначе говоря, какими свойствами должно обладать отношение Θ , в соответствии с которым множество M можно разбить на такие непересекающиеся классы, чтобы

1) любые два элемента (различные или одинаковые) из одного класса находились в отношении Θ ,

2) никакие два элемента из разных классов не находились в отношении Θ ?

На этот вопрос отвечает следующая

Т е о р е м а. *Отношение Θ на множестве M тогда и только тогда индуцирует разбиение множества M , когда оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

*) В дальнейшем мы будем писать просто «отношение».

Доказательство. Пусть отношение Θ индуцирует разбиение множества M , то есть множество M можно разбить на классы, удовлетворяющие условиям 1) и 2). Какой бы элемент a мы ни взяли, он принадлежит некоторому классу нашего разбиения. Согласно 1), a находится в отношении Θ с самим собой: $a\Theta a$ истинно, так что Θ — рефлексивно. Если, далее, $a\Theta b$ истинно, то, как следует из 1)—2), элементы a и b принадлежат одному классу разбиения. Тогда из 1) следует, что истинно и $b\Theta a$. Значит, для любых $a, b \in M$ *) из $a\Theta b$ следует $b\Theta a$, то есть отношение Θ симметрично.

Не читайте дальше, пока сами не убедитесь в том, что отношение Θ транзитивно!

Таким образом, если отношение Θ индуцирует разбиение множества M , то Θ рефлексивно, симметрично и транзитивно: свойства 1—3 необходимы для того, чтобы Θ индуцировало разбиение множества M .

Теперь ясно, почему мы не смогли разделить человечество на группы уважающих друг друга людей и почему отношение перпендикулярности не индуцировало разбиение прямых плоскости. Отношения «уважения» и перпендикулярности не транзитивны (и не рефлексивны).

Докажем теперь достаточность свойств 1—3. Пусть Θ обладает свойствами 1—3, и a — произвольный элемент множества M . Обозначим через M_a класс (множество) всех таких элементов x из M , для которых истинно $a\Theta x$:

$$M_a = \{x \mid a\Theta x \text{ — истинно}\}.$$

Мы получим таким образом некоторое множество классов. Так как по свойству 1 истинно $a\Theta a$, то $a \in M_a$ (по определению класса M_a) и, следовательно, каждый элемент множества M принадлежит хотя бы одному из полученных классов. Покажем, что любые два класса M_a, M_b или совпадают, или не пересекаются. В самом деле, если M_a и

M_b имеют хотя бы один общий элемент c , то $a\Theta c$ и $b\Theta c$ *). По свойству 2 из $b\Theta c$ следует $c\Theta b$, а из $a\Theta c$ и $c\Theta b$ по свойству 3 получим $a\Theta b$. Значит, $a\Theta b$ истинно. Возьмем теперь произвольный элемент d из класса M_b . По определению класса M_b истинно $b\Theta d$, а по свойству 3 из $a\Theta b$ и $b\Theta d$ следует $a\Theta d$; значит, $d \in M_a$. Итак, если $d \in M_b$, то $d \in M_a$. Аналогично доказывается, что из $d \in M_a$ следует $d \in M_b$ (проведите соответствующие рассуждения сами). Тем самым доказано, что $M_a = M_b$, то есть классы, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают. Таким образом, каждый элемент множества M содержится в некотором классе и разные классы не пересекаются. Это и означает, что мы имеем разбиение множества M . Покажем, что это разбиение действительно индуцируется отношением Θ , то есть выполняются условия 1)—2). Пусть элементы a и b содержатся в одном классе. Так как $a \in M_a$, то это означает, что и $b \in M_a$ (в предыдущей фразе оба подлежащих совершенно равноправны!), то есть $a\Theta b$. Итак, любые два элемента из одного класса находятся в отношении Θ : выполняется условие 1). Пусть теперь a и b — два произвольных элемента из разных классов, так что $M_a \neq M_b$. Если бы было $a\Theta b$, то это означало бы, что $b \in M_a$, то есть классы M_a и M_b имели бы общий элемент b . Но тогда, по доказанному выше, было бы $M_a = M_b$, что противоречит условию. Значит, $a\Theta b$ ложно, то есть элементы из разных классов не находятся в отношении Θ (выполняется условие 2)). Теорема доказана.

При фиксированном разбиении множества M элементы, содержащиеся в одном классе, обычно называют эквивалентными. В связи с этим всякое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называют *отношением эквивалентности*, а сами классы получаемого разбиения — *классами эквивалентности*.

*) Знак \in читается «принадлежит»: $a \in M$ означает, что a — элемент из множества M .

*) В тех местах, где это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать слово «истинно».

Теперь доказанную выше теорему можно сформулировать короче: отношение Θ на множестве M тогда и только тогда индуцирует разбиение множества M , когда оно является отношением эквивалентности.

Таким образом, если нам требуется выяснить, индуцирует ли некоторое отношение Θ разбиение какого-либо множества M , то нужно проверить, является ли отношение Θ отношением эквивалентности на M .

Например, множество всех окружностей плоскости распадается на классы концентрических окружностей, поскольку отношение концентричности окружностей рефлексивно, симметрично и транзитивно. (При этом мы, естественно, считаем, что

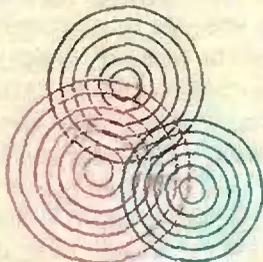


Рис. 3.

всякая окружность концентрична сама себе.) Весьма просто проверяется также, что рефлексивно, симметрично и транзитивно отношение подобия треугольников. Следовательно, множество всех треугольников разбивается на классы подобных треугольников.

Приведем один менее очевидный пример. Пусть Q — множество всех дробей вида $\frac{a}{b}$, где a, b — целые числа и $b \neq 0$. По каждой дроби $\frac{a}{b}$ определим класс $Q_{a,b}$, относя дроби $\frac{c}{d}$ в этот класс в том и только в том случае, когда $ad = bc$. Получится ли в итоге разбиение всех дробей на непересекающиеся классы?

Мы определили некоторое отношение Θ на множестве Q :

$\frac{a}{b} \Theta \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Выясним, является ли Θ отношением эквивалентности.

1. Рефлексивность. Для любой дроби $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} \Theta \frac{a}{b}$, поскольку $ab = ba$.

2. Симметричность. Если $\frac{a}{b} \Theta \frac{c}{d}$, то $ad = bc$, или $cb = da$. Последнее равенство означает, что $\frac{c}{d} \Theta \frac{a}{b}$.

3. Транзитивность. Пусть $\frac{a}{b} \Theta \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} \Theta \frac{e}{f}$, то есть $ad = bc$ и $cf = de$. Умножив последние равенства соответственно на f и b , получим:

$$adf = bcf, \quad bcf = bde.$$

Отсюда имеем $adf = bde$ и $af = be$ (на d можно сократить, поскольку $d \neq 0$). Но $af = be$ как раз и означает, что $\frac{a}{f} \Theta \frac{e}{f}$.

Таким образом, Θ — отношение эквивалентности и потому множество всех дробей распадается на непересекающиеся классы эквивалентных (или, как говорят в школе, равных по величине) дробей. Итак, имея отношение эквивалентности на некотором множестве, мы можем разбить это множество на классы. Но можно поступить и наоборот: сначала разбить множество на классы, а затем определить отношение эквивалентности, считая по определению два элемента эквивалентными в том и только в том случае, когда они принадлежат одному классу рассматриваемого разбиения. Например, таким образом появляется отношение «быть одноклассниками»: сначала детей, пришедших впервые в школу, разбивают (почти произвольно) на классы, а затем уже детей, оказавшихся в одном классе, называют одноклассниками.

Нельзя ли сэкономить?

Если нам часто приходится проверять, будет ли заданное отношение рефлексивным, симметричным и транзитивным, то естест-

венно возникает вопрос: не является ли какое-нибудь из указанных свойств 1—3 логическим следствием двух других (в этом случае нам не пришлось бы делать проверку всех трех свойств)?

Оказывается, это не так: свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности независимы. Чтобы доказать, что некоторое свойство не зависит от двух других, достаточно привести пример отношения, обладающего двумя последними свойствами, но не обладающего рассматриваемым.

Например, отношение \leq на множестве действительных чисел рефлексивно и транзитивно, но не симметрично. Значит, симметричность не является следствием рефлексивности и транзитивности. Свойство транзитивности также не вытекает из двух других. Например, для прямых плоскости отношение «прямая x_1 совпадает с прямой x_2 или перпендикулярна к x_2 », рефлексивно и симметрично, но не транзитивно. (Проверьте!)

Пример, показывающий независимость рефлексивности от двух других свойств, постарайтесь привести сами.

Отношения эквивалентности в математике

Мы уже говорили о значении разбиений множества на классы (или, как теперь можно сказать, отношений эквивалентности) в различных областях человеческой деятельности. Очень важную роль играет отношение эквивалентности в математике. Кроме упоминавшихся ранее, можно привести много других примеров отношений эквивалентности, с которыми вы встречались в школьной математике. Таковы, например, отношение «иметь одну и ту же абсолютную величину» для чисел, отношение равенства двух алгебраических выражений, отношение равновеликости многоугольников и многие другие.

Рассмотрим подробнее два примера, показывающие, как отношения эквивалентности используются при образовании важнейших понятий математики.

Натуральные числа. Понятие натурального числа было выработано человечеством в процессе длительного исторического развития. Прежде чем человек научился абстрактно представлять себе число 5, он научился откладывать 5 камеш-

ков, делать 5 зарубок, завязывать 5 узелков и т. п. и сравнивать эти «стандартные» множества с другими встречающимися ему множествами путем установления взаимно однозначного соответствия между ними. Этот процесс абстрагирования «в ускоренном темпе» каждый из нас проходит в детстве, приучаясь сначала выделять два глаза, два яблока, две машины и т. д. и только затем уже представлять себе число 2. Теперь, когда этот путь абстрагирования каждым из нас, надо полагать, уже давно пройден, попытаемся уяснить себе сущность понятия натурального числа. С этой целью определим следующее отношение Θ между конечными множествами: будем считать, что два конечных множества M и N находятся в отношении Θ тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение множества M на N . (О понятии отображения множеств можно прочесть, например, в статье А. Н. Колмогорова «Что такое функция» в № 1 «Кванта» за 1970 год.) Легко проверить, что введенное таким путем отношение Θ рефлексивно, симметрично и транзитивно. (Проверьте!) Следовательно, оно является отношением эквивалентности, и потому все конечные множества разбиваются в соответствии с ним на классы. Любые два множества из одного класса полученного разбиения и называют эквивалентными. Впрочем, чаще, — чтобы отличить полученное разбиение от прочих разбиений, индуцируемых произвольными рефлексивными, симметричными и транзитивными отношениями (напомним, что любое такое отношение есть отношение эквивалентности; примером может служить хотя бы отношение, отождествляющее, с одной стороны, все четные числа, а с другой, — все нечетные) — эквивалентные в этом смысле множества называют равномошными, или равночисленными. Например в классе, содержащем множество букв {а, б, в, г, д} будут содержаться множество пальцев на руке человека,

множество космонавтов космических кораблей «Восход» и «Восход-2», множество «частей света» (без Антарктиды!) и т. п. Уже из этого небольшого перечня видно, что в один класс входят множества самой различной природы и общим для всех них является лишь то, что все они равномощны, то есть любое одно из них можно взаимно однозначно отобразить на любое другое. Теперь сформулируем определение натурального числа: *натуральным числом* назовем всякий класс равномощных конечных множеств.

Такое определение поначалу может немало удивить: такая, вроде бы, простая штука, как натуральное число, определяется через что-то громоздкое и малообозримое — через целый класс множеств! Однако если в это определение хорошенько вдуматься, свыкнуться с ним, то придется согласиться, что оно действительно отражает «количественную суть» понятия натурального числа. В этом определении проявляется так называемая *абстракция отождествления*: сначала мы все конечные множества разбиваем на классы равночисленных множеств, затем «отождествляем» все множества одного класса и уже результат этого отождествления мыслим как некоторое натуральное число.

Поскольку каждый класс равномощных множеств вполне определяется любым своим представителем, то можно говорить о натуральном числе, определяемом любым множеством данного класса. Число, определяемое множеством M , обозначают через $|M|$ и называют *порядком*, или *мощностью*, множества M . Для натуральных чисел можно ввести систему обозначений, не связанную с конкретными множествами. Конечно, это можно сделать по-разному. Исторически так и было: у разных народов были разные системы обозначений и названий натуральных чисел. (Подробнее об этом сказано в статье И. М. Яглома «Системы счисления», см. «Квант», № 6, 1970). При-

держиваясь общепринятой в настоящее время системы обозначений и названий, можно сказать, что число 1 (единица) есть класс множеств, равномощных множеству столиц Советского Союза, число 2 (два) есть класс множеств, равномощных множеству глаз человека, и так далее. Добавляя к любому конечному множеству еще один элемент, мы получим новое множество, не равномощное исходному. Осуществляя этот процесс, мы получим бесконечную последовательность не равномощных друг другу множеств и определяемый ими ряд натуральных чисел:

1, 2, 3, ...

Р а ц и о н а л ь н ы е ч и с л а.
Обычно говорят, что рациональным числом называется дробь вида $\frac{a}{b}$, где a, b — целые числа и $b \neq 0$. Однако такое определение не полно, поскольку из него непосредственно не следует, равны или нет, например, числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{6}$. Поэтому приходится сразу же добавлять: рациональные числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны в том и только в том случае, когда $ad = bc$. В итоге получается, что рациональное число это не просто дробь, а целый класс дробей. Таким образом, понятие рационального числа более аккуратно вводится следующим образом.

Рассмотрим множество Q всех дробей и определим на Q отношение Θ , положив $\frac{a}{b} \Theta \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$. Выше мы уже показали, что такое Θ есть отношение эквивалентности и, значит, множество Q разбивается на непересекающиеся классы. Любые две дроби одного класса указанного разбиения мы и будем называть эквивалентными. Теперь можно сформулировать определение: *рациональным числом* называется всякий класс эквивалентных дробей. После всего сказанного ранее по поводу определения натурального числа мыслить себе рациональное число как класс дробей совсем просто.

Как складывать и умножать классы? После введенных выше определений натурального и рационального чисел естественно возникает вопрос: как определить арифметические операции над числами-классами? Для примера покажем, как определить умножение рациональных чисел, считая, что все операции над целыми числами нам уже знакомы.

Пусть α и β — два рациональных числа-класса. Возьмем из этих классов по какой-нибудь одной дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ и определим их *произведение*, положив

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Полученная дробь $\frac{ac}{bd}$, как и всякая дробь, принадлежит вполне определенному классу дробей γ . Этот класс мы и назовем *произведением* классов α и β : $\alpha\beta = \gamma$.

Таким образом, чтобы перемножить классы, нужно выбрать из них по одному (любому!) представителю, перемножить эти представители как дроби и взять класс, содержащий полученную в итоге дробь.

Сразу же, однако, возникает вопрос: не может ли получиться при умножении другой класс, если выбрать другие представители из классов α и β ? Покажем, что это не так.

Пусть $\frac{a'}{b'}$ и $\frac{c'}{d'}$ — какие-нибудь другие представители классов α и β . Так как $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ принадлежат одному классу α , то $\frac{a}{b} \Theta \frac{a'}{b'}$, то есть $ab' = ba'$. Аналогично получим $cd' = dc'$. Перемножая почленно два последних равенства, найдем $acbd' = dbca'$. Но это означает, что $\frac{ac}{bd} \Theta \frac{a'c'}{b'd'}$. Значит, «новое» произве-

дение дробей $\frac{a'c'}{b'd'}$ принадлежит тому же классу γ , что и $\frac{ac}{bd}$.

У п р а ж н е н и я

1. Пусть Θ_1 и Θ_2 — два отношения эквивалентности на некотором множестве M . Будут ли отношением эквивалентности на M отношения Θ , определенные следующим образом: а) $a\Theta b$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $a\Theta_1 b$ или $a\Theta_2 b$; б) $a\Theta b$ истинно тогда и только тогда, когда истинны $a\Theta_1 b$ и $a\Theta_2 b$; в) $a\Theta b$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $a\Theta_1 b$ и ложно $a\Theta_2 b$.

2. Пусть $f(x)$ — функция на множестве действительных чисел. Определим отношение Θ_f , положив $a\Theta_f b$ истинным тогда и только тогда, когда $f(a) = b$. Что можно сказать о графике функции $f(x)$, если отношение Θ_f симметрично? Найти функцию $f(x)$, для которой Θ_f является отношением эквивалентности. Каковы в этом случае классы эквивалентности?

Только ли математика? Что читать дальше?

В самом начале этой статьи говорилось об универсальном характере и применимости разбираемых в ней понятий. В дальнейшем же, однако, изложение носило по возможности «чисто математический» характер. Это не случайно: вопрос об отношениях эквивалентности (и связанных с ними разбиениях) в не рамок математики настолько интересен и глубок, что вскользь его разбирать не стоит. Читателю, заинтересовавшемуся этой проблематикой, мы прежде всего хотим порекомендовать две изданные в издательстве «Наука» книги: «Проблемы узнавания» М. М. Бонгарда (1967) и «Равенство. Сходство. Порядок». Ю. А. Шрейдера (1971). Многое в них может показаться вам (и совершенно справедливо!) довольно трудным и сложным, но то, что вы при внимательном чтении усвоите из этих книг, все равно послужит лучшей подготовкой к более широкому обсуждению понятия эквивалентности, которое редакция «Кванта» предполагает провести в будущем. Предлагаем вам также в связи с этим перечитать статью В. Р а с к и н а «Еще раз о машинном переводе» из «Кванта» № 12 за 1971 год и попытаться найти в ней примеры отношений эквивалентности; это послужит неплохим самоконтролем усвоения изложенных выше понятий.



Мы знаем далеко не все ресурсы Луны, но и того, что известно, достаточно, чтобы предположить, что в будущем на Луне возникнут лунные станции и колонии. Одна из основных трудностей в организации колоний — обеспечение человека водой и кислородом. В день человеку необходимо примерно 0,9 кг безводной пищи, 0,9 кг кислорода и 2,7 кг воды. В лунных образцах, доставленных советскими и американскими космическими кораблями, никаких следов воды не обнаружено.

Однако есть основания предполагать, что вода на Луне была.

В наши дни получила широкое распространение теория эволюции, по которой Луна, как и Земля, образовалась из облака мелких твердых частиц. Эти частицы у Луны содержали примерно столько же воды (т. н. ювенильная, то есть первоначальная вода), сколько ее содержало вещество Земли: «строительный материал» у Земли и Луны был примерно одинаков. Распад радиоактивного урана и радиоактивного калия привел с течением времени к разогреву глубинных слоев Луны до температур 1000—2000° С. Содержащаяся в веществе Луны вода испарялась и проникала в виде пара наружу, к поверхности. Судьба этого пара зависела от условий у поверхности Луны, от ее температуры.

Температура поверхности Луны достигает днем +120° С, а ночью опускается до —160° С (в полярных районах до —200° С). Материалы, из которых сложена поверхность Луны (мелкие обломки различных минералов — так называемый «реголит»), плохо проводят тепло. Поэтому суточные колебания температуры проникают весьма неглубоко и уже на глубине меньше метра под поверхностью температура не зависит от времени лунных суток. В низких широтах, вблизи экватора, она равна примерно —30° С. При такой низкой температуре под поверхностью выделившийся из недр Луны водяной пар должен был замерзнуть, образуя слой льда.

Оценим границы слоя льда. Температура растет с глубиной. На Земле температура увеличивается на 28° С на каждом пройденном вглубь километре. Допустим, что радиоактивные процессы выделения тепла на Луне такие же, как на Земле. Тогда на Луне температура повысится на 30° С до точки таяния льда (0° С) на глубине около 1 км. Такова нижняя граница лунного слоя вечной мерзлоты (рис. 1), а под ним расположен слой воды.

На верхней границе слоя льда с его поверхности непрерывно отрываются молекулы, лед испаряется. Горные породы на Луне, как это уста-

новлено при исследовании лунных образцов, всегда содержат поры. Молекулы пара пролетают по этим порам и выходят на поверхность Луны.

Мы знаем возраст горных пород Луны по относительному содержанию радиоактивных изотопов и продуктов их распада в лунных образцах. Этот возраст порядка 4,5 миллиарда лет. Расчет показывает, что при $t = -30^\circ\text{C}$ и известных нам физических свойствах и структуре лунных горных пород за эти 4,5 миллиарда лет лед из лунной коры испарился не весь.

Гипотезу о вечной мерзлоте и глубинном слое воды на Луне выдвинул в 1961 году американский астрофизик Голд. Однако его вывод о существовании в глубине лунной коры льда и воды основан на некоторых предположениях.

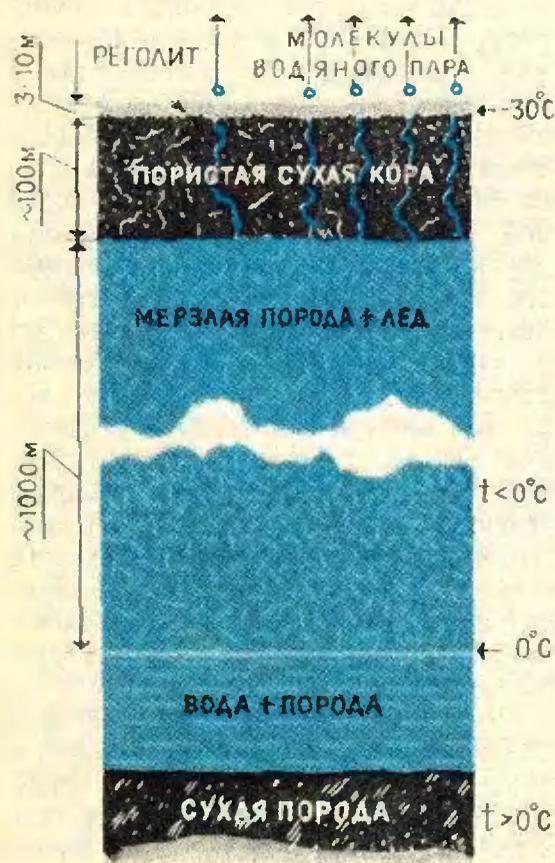


Рис. 1.

Во-первых, считается, что общее количество ювенильной воды в 1 кг вещества Земли и Луны было одинаково, и это общее количество ювенильной воды оценивается по средней глубине мирового океана (слой воды, получающийся делением объема воды океанов, морей, льдов Арктики и Антарктики, льдов горных районов на поверхность Земли). На Земле эта глубина ~ 1 км.

Во-вторых, считается, что значительная часть ювенильной воды выходила на поверхность уже после остывания лунной коры и потому замерзала в лед, который испарялся медленно — сквозь поры.

Если пары ювенильной воды успели выйти на поверхность до того, как лунная кора охладилась, то с течением времени они могли сконденсироваться на поверхности в жидкую фазу и затем быстро испариться, и ни вечной мерзлоты, ни глубинного слоя воды на Луне не может быть.

Наконец, мы еще слишком плохо знаем свойства лунной коры, чтобы надежно рассчитать процесс испарения из нее льда.

Подпочвенные льды есть и на Земле. В тех районах, где среднегодовая температура ниже 0°C , под поверхностью Земли сохраняется слой вечно мерзлой почвы, которая только частично оттаивает летом. Районы вечной мерзлоты составляют 15% земной суши (и еще 10% суши занимают ледники). В нашей стране вечная мерзлота охватывает обширные пространства Сибири и Дальнего Востока.

Превращения лед—вода—пар на Луне и на Земле *)

Поднимемся теперь из глубины на поверхность Луны. Как будут вести себя вода, лед и пар днем ($t = +120^\circ\text{C}$

*) Настоятельно рекомендуем читателю популярную книгу академика Л. Д. Ландау и проф. А. И. Китаягородского «Физика для всех», М., «Наука», 1963. Глава 12 этой книги послужит наилучшим пособием по всем физическим вопросам, затронутым в нашей статье.

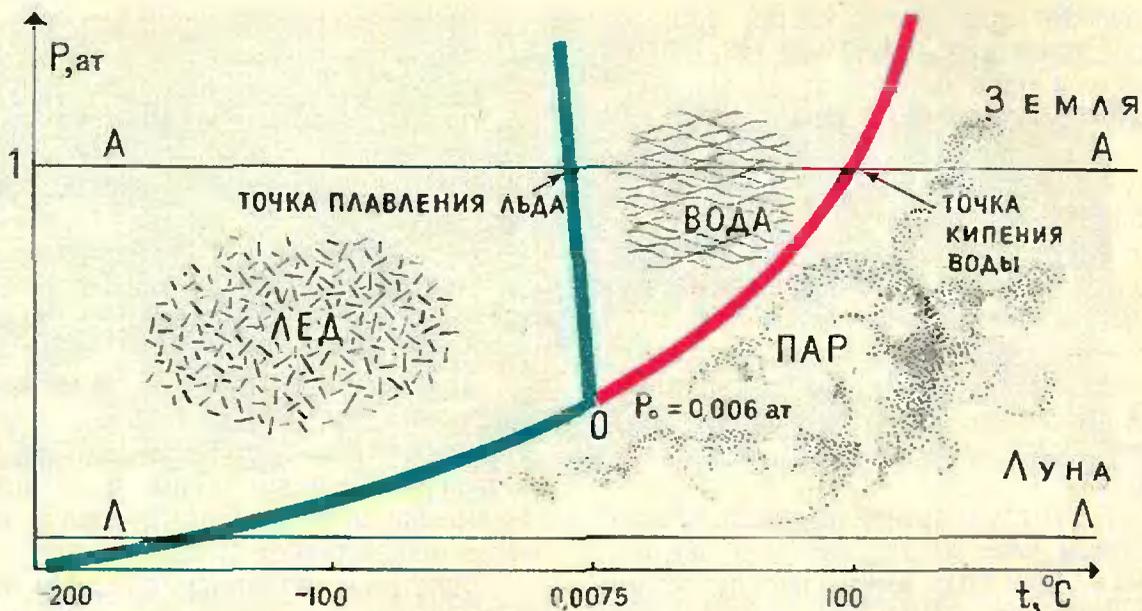


Рис. 2.

и ночью ($t = -160° C$) на самой поверхности, без защитного слоя лунной коры? Ответ на эти вопросы дает так называемая диаграмма состояния воды (рис. 2), о которой мы сейчас и расскажем.

Будем по вертикальной оси откладывать давление, под которым находится лед, вода или пар, а по горизонтальной оси — их температуру. Каждой точке на плоскости, ограниченной осями координат P и t , соответствует определенное состояние воды (лед, вода или пар).

Начнем со льда. Синяя кривая показывает зависимость давления, под которым плавится лед, от температуры. Чем выше давление, тем ниже температура плавления. Отойдём от синей кривой немного вправо: при том же давлении повысим температуру. Лед полностью растает — точки плоскости правее синей кривой соответствуют воде. Если от синей кривой отойти влево — уменьшить температуру, то вода замерзнет, превратится в лед. В точках самой кривой (и только при этих давлениях и температурах) лед и вода находятся в равновесии друг с другом — сколько плавится льда, столько же воды превращается в лед. Поэтому синюю

кривую называют кривой равновесия льда и воды.

Если мы будем повышать температуру воды при неизменном давлении, то попадем в область таких температур, при которых может существовать только пар. Эта область температур и давлений находится справа от красной кривой — кривой равновесия воды и пара, или, другими словами, кривой зависимости температуры кипения воды от давления. Эта кривая, как видно из рисунка, показывает, что чем ниже давление, под которым находится вода, тем ниже и температура ее кипения. Это мы хорошо знаем — например, высоко в горах, где давление воздуха мало, альпинисту трудно сварить в кипятке яйцо, приходится жарить яичницу. На вершине Эльбруса, где давление составляет половину атмосферного, вода кипит при $82° C$.

Уменьшим давление до $0,006 ат$. Опыт показывает, что температура кипения снизится до нуля (точнее, до $0,0075° C$) — «кипяток» имеет теперь температуру заморозания воды. А что будет при дальнейшем понижении давления? Температура кипения упадет ниже нуля, «кипяток»,

находящийся в равновесии с паром, замерзнет, будет уже не жидкостью — водой, а твердым телом — льдом. Лед будет испаряться, не плавясь. Зеленая кривая на рисунке — кривая равновесия лед — пар.

Точка O , в которой соединяются все три ветви, называется тройной точкой. Если в закрытом сосуде при температуре $t = 0,0075^\circ\text{C}$ и давлении паров $P = 0,006\text{ ат}$ находятся вода, лед и пар, то масса каждой из этих трех форм воды остается неизменной — сколько воды испаряется, столько же и конденсируется, сколько льда плавится, столько же и замерзает воды.

Если давление больше $0,006\text{ ат}$, то при нагревании лед вначале плавится, то есть переходит в воду, а уже вода, при дальнейшем нагревании, кипит и переходит в пар. В области давлений, меньших чем в тройной точке, лед при нагревании непосредственно переходит в пар, минуя жидкое состояние — воду.

Пусть кусок льда нагревается на поверхности Земли. Как определить, в каком состоянии он находится? Из диаграммы состояния воды сразу видно, что знания одной температуры недостаточно — надо задать еще внешнее давление. Тогда определится и точка диаграммы состояния, в которой находится в данный момент вода.

Предположим, что процесс изменения состояния воды идет при постоянном давлении. У поверхности Земли давление, под которым находится вода, равно 1 ат . Это значительно выше давления водяного пара $0,006\text{ ат}$ в тройной точке. Поэтому изменение состояния воды при нагревании изображается прямой AA' : сначала достигается температура плавления, затем лед переходит в воду, при дальнейшем нагревании выше 100°C вода закипает и переходит в пар. Например, на Земле летом лед в слое вечной мерзлоты в верхних нескольких метрах земной коры оттаивает, и над ним появляется вода.

Пусть теперь кусок льда нагревается Солнцем на лунной поверхности. Полдень, палящее Солнце, температура почвы $+120^\circ\text{C}$. Поскольку давление на поверхности Луны значительно ниже, чем в тройной точке, то состояние льда будет меняться по прямой LL' — лед испарится, не превращаясь в воду. Ведь при давлениях ниже $0,006\text{ ат}$ вода в жидком состоянии вообще не существует ни при какой температуре.

Аналогичным образом ведет себя на Земле «сухой лед» — твердая углекислота CO_2 . В его тройной точке давление $P = 5,11\text{ ат}$, температура $t = -56,6^\circ\text{C}$. Земное атмосферное давление меньше, чем в тройной точке для углекислоты, поэтому углекислота не может быть жидкой и превращается непосредственно в пар. «Сухой лед» применяют, например, продавцы мороженого, чтобы оно не таяло.

У читателя может возникнуть следующая проблема. Водяных паров в воздухе мало, а большую часть атмосферного давления в 1 ат создают кислород и азот. Почему же на диаграмме состояния (см. рис. 2) мы берем температуру кипения при давлении 1 ат , а не при более низком давлении водяных паров атмосферного воздуха? Какое давление определяет собой состояние вещества — давление самого вещества или полное давление на поверхность раздела?

Для кривой плавления такого вопроса не возникает. В этом случае давление на поверхность раздела

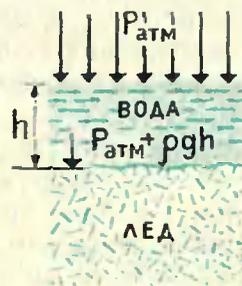


Рис. 3.

равно атмосферному или больше него, если лед покрыт слоем воды (рис. 3).

Для кривой равновесия вода—пар все обстоит сложнее. Все точки справа от красной кривой соответствуют устойчивому состоянию — пар, слева — устойчивому состоянию — вода. Если давление водяного пара меньше давления на красной кривой, то вода при данной температуре полностью испарится (пар над ней ненасыщенный). В атмосферном воздухе давление водяного пара обычно составляет $0,013 \text{ ат}$, то есть 60% от давления насыщенного пара. Поэтому налитая в блюдце вода со временем всегда испарится. При охлаждении воздуха давление $0,013 \text{ ат}$ становится больше давления насыщенных паров при новой температуре и водяной пар конденсируется (пример — утренний роса).

Но испарение с поверхности жидкости — процесс очень медленный. Существует другой процесс перехода жидкости в пар, значительно более быстрый — испарение при кипении. В этом случае пузырьки пара образуются во всем объеме жидкости. Внешнее давление (полное давление 1 ат) передается с поверхности жидкости также и во все точки в ее глубине, поэтому образующийся внутри жидкости пар должен иметь давление, равное (или большее) полному давлению на жидкость, вне зависимости от того, какова причина этого внешнего давления — водяной пар или давление атмосферного воздуха.

На Луне на открытой поверхности вода всегда кипит, а внизу замерзает. Но в зависимости от времени суток (то есть от нагревания Солнцем) тут могут быть самые разнообразные эффекты.

Замерзнет пар или нет, зависит не только от его температуры, но и от давления. На Луне при ничтожных давлениях водяной пар мог выйти на ее поверхность, и не замерзнув. На рисунке 2 мы видим, что в лунных условиях водяной пар может существовать

и при температурах, близких к -200°С . Все зависит от условий (зависимость давления от глубины, температура, пористость вещества Луны), которые на протяжении 4,5 миллиарда лет истории Луны могли быть самыми различными.

Таким образом, оба основных пункта теории подпочвенного льда — выход достаточного количества водяного пара из недр Луны и его замерзание у поверхности — основаны на определенных предположениях и нуждаются в проверке на опыте. Надо разработать экспериментальные методы поиска льда и с их помощью обследовать Луну по всей поверхности, а также и вглубь.

Диапазон изменения температур на лунной поверхности очень широкий (от -160 до $+120^\circ \text{С}$). Можно предположить, что свойства льда в таком широком диапазоне температур тоже не постоянны. Поиски льда на Луне (пока теоретические) побудили к новым исследованиям свойств льда в земных лабораториях.

В 1969 году был изучен процесс замерзания воды в условиях лунной тени, то есть при давлении, меньшем десяти миллионных долей атмосферы, и температуре (-170°С)—(-180°С). При этом была открыта неизвестная до сих пор форма льда — аморфный лед. Он вдвое плотнее воды: вода, замерзая при столь низких температурах, не расширяется (вспомните, что обычный лед плавает на поверхности воды), а сжимается.

Схема опыта очень проста. Дистиллированная вода впускалась в вакуумную камеру и намерзала тонким слоем льда на металлическом конусе. Объем льда определялся сравнением фотографий конуса до и после намерзания льда, масса определялась взвешиванием. Отсюда находилась плотность. Лед, намерзавший на конусе при температурах ниже -175°С , имел плотность $2,3 \text{ г/см}^3$ и был похож на стекло. Примеси других веществ мешают образованию тяжелого льда; он характерен для совершенно чистой воды.

Возможны ли на Луне реки?

На первый взгляд, нет. Если вода находится в твердом или газообразном состоянии, то как же она может течь? Однако при более внимательном анализе диаграммы состояния (рис. 2) такой простой ответ оказывается неверным.

Представим себе, что по поверхности Луны течет поток воды. Вода будет интенсивно испаряться с поверхности. При испарении тратится много тепла. Это тепло отнимается у еще неиспарившейся воды и она начнет замерзать. Образующийся лед легче воды. Он будет плавать на поверхности и создаст дополнительное давление на поверхность воды своим весом. Когда давление слоя льда $P = \rho gh$ превысит давление в тройной точке $P_0 = 0,006 \text{ ат}$, вода перестанет испаряться.

На Луне $g = 1,16 \text{ м/сек}^2$, плотность льда равна $0,9 \text{ г/см}^3$, то есть минимальная толщина слоя льда, предохраняющего воду от кипения при 0° С , равна

$$h = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{0,006 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2}{0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 1,6 \text{ м/сек}^2} \approx 0,4 \text{ м}.$$

Но есть ли на поверхности Луны борозды, похожие на русла земных рек? Оказывается, да. Извилистые борозды были замечены на Луне еще в 1788 году. Они обычно берут свое начало в кратерах, на возвышенностях и кончаются в низинах. Недавно американские ученые Лингенфельтер, Пил и Шуберт предположили, что извилистые борозды — это бывшие русла лунных водных рек, протекавших под защитным слоем льда. Действительно, по своему строению и размерам извилистые борозды внешне похожи на русла земных рек. Источником воды мог послужить подледный ее слой. Крупный метеорит в состоянии пробить лунную кору до водного слоя и открыть воде путь на поверхность.

Но существуют и другие теории возникновения извилистых борозд, например, от потоков лавы. Правильна ли та или иная теория, должны показать дальнейшие исследования. В «земных» лабораториях предпри-

нимались попытки смоделировать «лунные реки».

В вакуумную камеру помещался поднос с размерами $30 \times 42,5 \text{ см}$, дно которого заполнялось слоем измельченной скальной породы с частицами от 100 микрон до 4 мм (в большинстве опытов диаметр частиц этого «реголита» составлял 100—500 микрон). Толщина слоя породы менялась от 0 до 5 см. Поднос ставился наклонно. Вода вводилась через трубку в торцевой части подноса, поднятой вверх, со скоростью до 800 миллилитров в минуту. В камере поддерживалось давление около $0,0013 \text{ ат}$, то есть в пять раз ниже, чем давление в тройной точке.

Результаты опыта были следующие. При атмосферном давлении поток воды действительно прорывал в «реголите» систему каналов. Правда, извилины, характерных для земных рек, не наблюдалось, но эти каналы тоже разветвлялись и меняли направление.

При опытах в вакууме наблюдалась совсем иная картина. Поток воды интенсивно закипал по всей своей длине, разбрасывая в стороны частицы «лунной пыли» и образуя несколько льда. Кипение продолжалось несколько секунд, пока источник воды не покрывался ледяной коркой. Вода продолжала течь под слоем льда, но текла не обязательно вниз, по направлению наклона подноса с почвой. Она просачивалась сквозь «реголит», прорываясь на поверхность то в одном, то в другом месте. Этот процесс выхода на поверхность носил характер взрыва — струя пара увлекала за собой частицы реголита затем образовывалась ледяная корка. В конце каждого опыта ледяной слой покрывал собой весь поднос с почвой. Затем он испарялся. Образование каналов не наблюдалось, поверхность почвы приобретала холмистый характер.

Так что экспериментальных подтверждений гипотезы о «лунных реках» не нашло.

Более вероятно выделение водяных паров из глубин Луны вулканами. Вулканическую деятельность (выделение газов из глубин Луны) обнаружил ленинградский астроном профессор Козырев. Если в глубине еще сохранилась вода, то при извержениях газов должны выделяться и пары воды.

От редакции

Недавно в нашей печати было сообщение о том, что группа американских ученых, проводивших исследования Луны по показаниям приборов, оставленных на ее поверхности экипажами космических кораблей «Аполлон-12» и «Аполлон-14», обнаружила «лунный гейзер», извергающий водяной пар. Это сообщение нуждается в дальнейшей проверке.



ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Р. В. Фрейвалд

На V Всесоюзной математической олимпиаде*) была предложена следующая задача:

Переключатель (рис. 1) с двумя входами и двумя выходами может находиться в двух различных состояниях.

На рисунке 2 изображена схема телефонной связи с тремя входами и тремя выходами, которая обладает таким свойством «универсальности»:

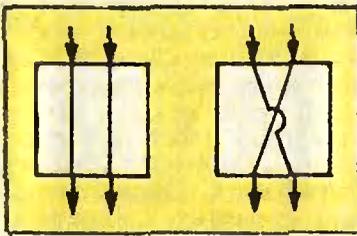


Рис. 1.

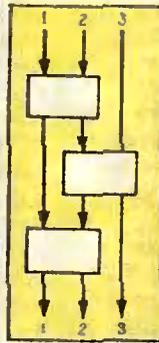


Рис. 2.

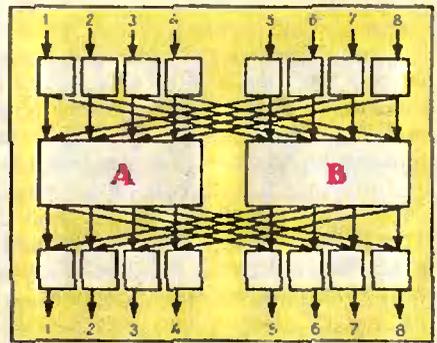
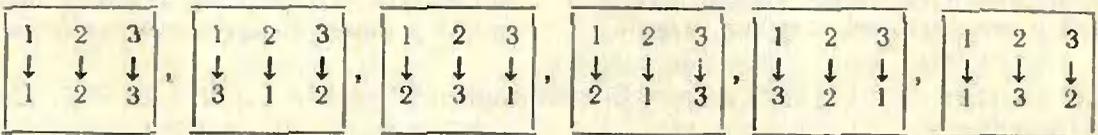


Рис. 3.

меняя состояния переключателей, можно осуществить любое из шести соединений трех входов с тремя различными выходами, то есть



(Проверьте это. Заметьте, что общее число различных состояний этой схемы равно $2^3=8$, поскольку каждый из переключателей может находиться в двух состояниях.)

а) Постройте схему с четырьмя входами и четырьмя выходами, которая была бы «универсальной», то есть осуществляла бы любое из 24 возможных соединений входов и выходов.

б) Какое минимальное число переключателей нужно для такой схемы?

в) Назовем схему с n входами и n выходами n -универсальной, если

*) Подробнее о пятой олимпиаде см. «Квант» № 11 за 1971 г., стр. 35—42.

она осуществляет любое из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ возможных соединений n входов с n различными выходами. На рисунке 3 изображена схема с восьмью входами и восьмью выходами, где A и B — 4-универсальные схемы. Докажите, что она является 8-универсальной.

Оцените сверху и снизу число переключателей в минимальной n -универсальной схеме.

Рассмотрим следующую схему (рис. 4). 4-универсальность этой схемы можно легко проверить, подбирая для всех $4! = 24$ требуемых соединений нужные состояния переключателей. Заметим, что практически удобнее поступать наоборот: рассмотреть все $2^5 = 32$ различных состояния схемы и выписать, какое соединение осуществляется каждым состоянием схемы (попробуйте проделать это!).

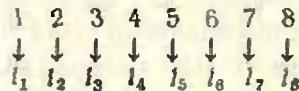
Если некоторая схема состоит из 4 или меньшего числа переключателей, то эта схема может иметь только $2^4 = 16$ различных состояний. Поэтому такая схема не может осуществлять 24 различных соединения и, следовательно, не может быть 4-универсальной. Итак, мы решили задачи а) и б).

Последнее рассуждение можно обобщить. Пусть n -универсальная схема состоит из m переключателей. Эта схема имеет 2^m различных состояний и должна осуществлять $n!$ различных соединений. Поэтому $2^m \geq n!$ и, следовательно, $m \geq \log_2(n!)$. Так как для $n \geq 2$, $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, то $m >$

$\log_2 \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \right) = \frac{n}{2} \cdot (\log_2 n - 1)$. Пользуясь более точным неравенством $n! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n$ (см. задачу 3 в статье М. И. Башмакова «О постулате Бертрана» — «Квант» № 5, 1971, стр.6), полученную оценку можно улучшить примерно в два раза: $m > n(\log_2(n+1) - \log_2 e)$.

Докажем теперь 8-универсальность схемы, изображенной на рисунке 3. Вообще говоря, и это доказательство можно вести перебором состояний схемы, но здесь такой перебор уже практически неосуществим (по крайней мере, за время, отведенное на Олимпиаду). Поэтому нужно рассуждать более рационально.

Пусть требуется осуществить соединение



Будем говорить, что это соединение состоит из 8 связей: 1-я связь соединяет 1-й вход с l_1 -м выходом, 2-я связь соединяет 2-й вход с l_2 -м выходом, и так далее.

Заметим, что любую связь (например, 3-го входа с 5-ым выходом) в нашей схеме можно осуществить в точности двумя способами — через блок A и через блок B (рис. 5 и 6). Каждый из этих блоков имеет 4 входа и выхода. Для осуществления нашего соединения мы должны все 8 связей распре-



Рис. 4.

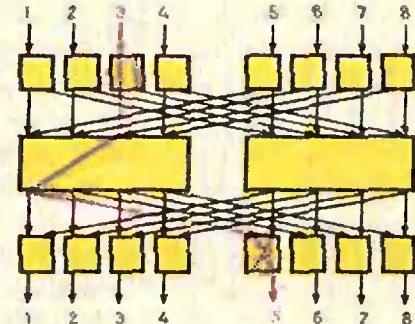


Рис. 5.

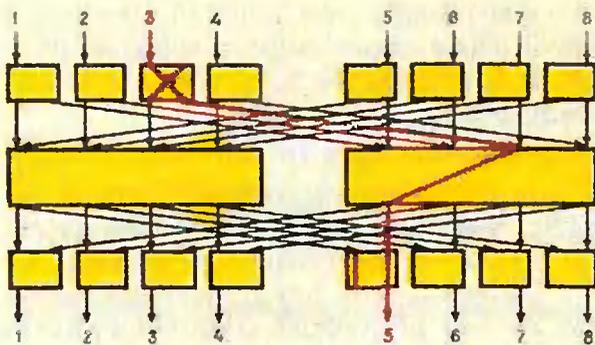


Рис. 6.

из этих входов должен быть подключен к блоку А, другой — к блоку В, иначе две связи будут подключены к одному и тому же входу некоторого блока. К разным блокам должны быть подключены также следующие пары входов: 2-й и 6-й, 3-й и 7-й, 4-й и 8-й. Легко видеть, что такое условие распределения связей по блокам не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы в схеме разные связи не проходили через один и тот же вход блоков А и В. Чтобы сформулировать такое же условие для выходов в блоках А и В, полезно обратить внимание на симметричное расположение входов и выходов схемы. заключаем, что следующие пары выходов схемы должны быть подключены к разным блокам: 1-й и 5-й, 2-й и 6-й, 3-й и 7-й, 4-й и 8-й.

Изобразим на рисунке эти отношения между различными связями одного и того же соединения. Каждую отдельную связь изобразим прямоугольником, внутри которого записано, какой вход с каким выходом данная связь соединяет. Если две связи обязательно должны проходить через разные блоки, то соответствующие им прямоугольники соединим линией. При этом проведем линию красного цвета, если на 4 отличаются входы, и синего — если на 4 отличаются выходы.

Например, соединение

1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3	8	1	6	2	7	5	4

таким способом изображено на рисунке 7.

Каково бы ни было соединение, из каждого прямоугольника выходит в точности одна синяя и в точности одна красная линия. Поэтому рисунок всегда состоит из одного или нескольких «колец». При этом в каждом «кольце» красные и синие линии чередуются, иначе из некоторого прямоугольника выходили бы две линии одного цвета. Следовательно, каждое «кольцо» содержит четное число прямоугольников.

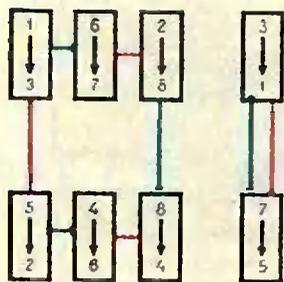


Рис. 7.

делить по блокам А и В так, чтобы 4 связи проходили через А и 4 — через В. При этом мы должны следить, чтобы две разные связи не проходили через один и тот же вход или один и тот же выход блоков А и В.

Рассмотрим первый и пятый вход нашей схемы. Каждый из них может быть подключен либо к первому входу блока А либо к первому входу блока В. Следовательно, один

Пользуясь таким рисунком, легко распределить связи по блокам так, чтобы выполнялись все указанные выше ограничения. Для этого нужно следить, чтобы связи, которым соответствуют прямоугольники, соединенные линией, проходили через разные блоки. Поэтому в каждом «кольце» рисунка нужно выбрать произвольным образом по одному прямоугольнику и соответствующую этому прямоугольнику связь осуществить через блок А, далее, связь, соответствующую соседнему прямоугольнику, осуществить через блок В, потом связь, соответствующую

шую следующему прямоугольнику, через A и так далее, пока «кольцо» замкнется. Связи, соответствующие первому и последнему прямоугольникам, при этом будут осуществляться через разные блоки, так как число прямоугольников в «кольце» четно. 8-универсальность схемы (см. рис. 3) доказана. Заметим только, что распределение связей по блокам всегда можно провести так, чтобы один из переключателей (например, левый нижний) находился в каком-то заранее заданном состоянии. (Другими словами, этот переключатель можно из схемы удалить, а схема не перестанет быть универсальной.) Тогда в «кольце», содержащем связь, проходящую через выделенный переключатель, распределение связей по блокам нужно начать именно с этой связи.

Для оценки сверху числа переключателей в минимальной n -универсальной схеме будем строить n -универсальные схемы с возможно меньшим числом переключателей. Приведенное выше доказательство 8-универсальности схемы (см. рис. 3) легко обобщить на случай любого четного числа входов. Этот способ дает возможность, имея 8-универсальную схему, строить довольно экономную 16-универсальную схему, потом 32-универсальную схему и так далее. Можно подсчитать, что если $n=2^k$ и в качестве блоков 4-универсальной схемы использовать схему (рис. 4), то такая схема имеет $2k \cdot 2^k - \frac{11}{4} \cdot 2^k = 2n \cdot \log_2 n - \frac{11}{4} \cdot n$ переключателей. Если n не равно целой степени двойки, то можно использовать схему, являющуюся универсальной для большего числа входов, равного полной степени двойки. Так как ближайшая сверху полная степень двойки превосходит данное число n не более чем в два раза, получается, что для любого n существует n -универсальная схема, содержащая не более $4n \cdot \log_2 n$ переключателей.

(Окончание см. на стр. 27.)

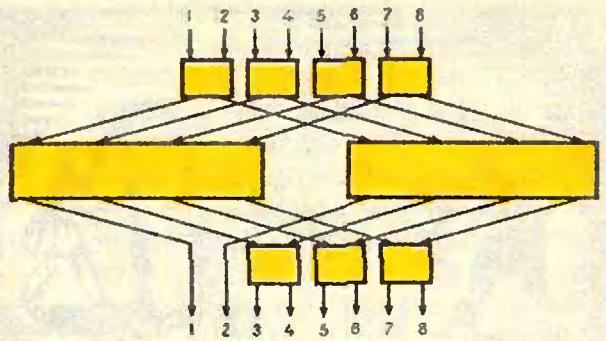


Рис. 8.

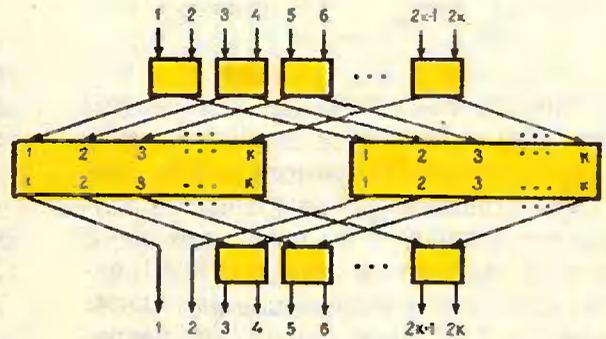


Рис. 9.

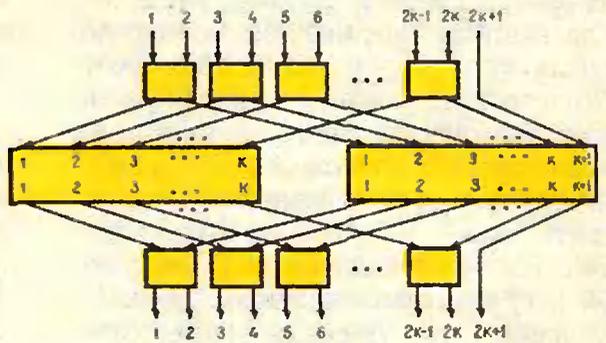


Рис. 10.



ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ СВЕТА

Еще за 300 лет до нашей эры греческие ученые уже знали, что свет распространяется прямолинейно, обладает свойством отражаться от гладких поверхностей и при этом угол падения равен углу отражения. Древние знали также о преломлении света. Клавдий Птоломей, великий астроном и математик древности, составил таблицы измеренных им углов падения и преломления. Но по вопросу о скорости света в древней науке не было единого мнения. Большинство ученых того времени, в том числе и Аристотель, считали, что скорость света бесконечно велика — ведь никакими из существовавших тогда приборов и методов ее нельзя было измерить даже приблизительно. Тем не менее, 900 лет назад арабский ученый и врач Авиценна высказал предположение, что скорость света, хотя и очень велика, но конечна. С ним соглашался и его современник Альгазен. Но, конечно, ни один из них не мог подтвердить свое мнение фактами или экспериментами.

Так или иначе, все поколения на протяжении веков проявляли интерес к природе света, о чем говорят и дошедшие до нас мифы, легенды, предания. Этот неиссякаемый интерес к явлениям природы был сначала единственным мотивом, побудившим ученых приняться за экспериментальное измерение скорости света. Один из крупнейших физиков-эксперимен-

таторов Альберт Майкельсон, почти всю жизнь посвятивший измерению скорости света, на вопрос корреспондентов: «А зачем это нужно?» отвечал: «Ведь это ужасно интересно!». Но еще до работ Майкельсона определение величины скорости света и ее зависимости от различных условий приобрело характер не только удовлетворения любознательности ученых. Все более волнующая умы загадка «светоносного эфира», вопрос о корпускулярной или волновой природе света, а затем и теория относительности потребовали точного знания скорости света. В наше же время точное определение этой величины имеет уже чисто практическое значение. Ее необходимо знать и при расчете энергетики ядерных реакций, и для измерения расстояний между космическими объектами в связи с расширением космических исследований, и во многих других, не менее важных проблемах.

Первым, кто попытался экспериментально определить скорость света, был Галилео Галилей. Его метод был чрезвычайно прост, но, к сожалению, не дал результата. Вот как сам Галилей описывал его:

«Опыт, который я придумал, заключается в следующем. Два лица держат каждый по огню, заключенному в фонаре или чем-либо подобном, который можно открывать или закрывать движением руки на виду

у компаньона; став друг против друга на расстоянии нескольких локтей, участники начинают упражняться в открывании и закрывании огня таким образом, что как только один замечает свет другого, так тотчас же открывает и свой... Мне удалось произвести его лишь на малом расстоянии — менее одной мили, — почему я не мог убедиться, действительно ли появление противоположного света совершается внезапно. Но если оно происходит и не внезапно, то, во всяком случае, с чрезвычайной быстротой».

Ясно, что имевшиеся тогда в распоряжении Галилея средства не позволяли решить этот вопрос. Споры ученых продолжались, и единого мнения по-прежнему не было: одни считали скорость света конечной величиной, другие — настолько большой, что не стоит и пытаться ее измерить, третьи — бесконечной.

Первые измерения скорости света были осуществлены в 1676 году. Молодой датский астроном Оле Рёмер приступил к работе в новой Парижской обсерватории. Как и все астрономы того времени, Рёмер знал, что время между затмениями спутника Юпитера — Ио — непостоянно в течение года. Если определить время начала затмения в момент, когда Земля находится в такой точке своей орбиты, что расстояние Земля — Юпитер наименьшее (рис. 1: Z_1 — положение Земли, $Ю_1$ — положение Юпитера), то можно предсказать время начала следующего затмения Ио (зная период обращения Ио вокруг Юпитера).

Однако следующее затмение наступает несколько позже предвычисленного момента времени. Постепенно время «запаздывания» увеличивается, а затем уменьшается, и примерно через год (чуть больше) начало затмения Ио наблюдается с Земли в тот момент времени, который соответствует вычислениям. Максимальное запаздывание отмечается примерно через полгода от того момента, когда Земля и Юпитер находились в положениях Z_1 и $Ю_1$, то есть когда Земля находится в положении Z_2 , а Юпитер — в положении $Ю_2$ (см. рис. 1). Расстояние $Z_2Ю_2$ (Земля—Юпитер) отличается от расстояния $Z_1Ю_1$ на величину диаметра земной орбиты. Рёмер решил, что максимальное запаздывание начала затмения Ио равно времени τ , которое затрачивает свет на прохождение пути, равного диаметру земной орбиты d , то есть $\tau = d/c$. Максимальное время запаздывания по измерениям того времени составляло 1320 сек, диаметр земной орбиты считался приблизительно равным 283 миллионам километров. Используя эти данные, Рёмер получил для скорости света значение $c = 214300$ км/сек.

Следующим, кто измерил скорость света, был английский астроном Джеймс Брайлей. Он использовал для вычислений явление абберации света.

Явление абберации заключается в том, что видимые положения звезд на небе описывают в течение года более или менее вытянутые эллипсы, большие оси которых одинаковы. Брайлей предположил, что абберационный эллипс получается в результате сложения скорости света, идущего от звезды, и скорости вращения Земли вокруг Солнца. Допустим, — говорил он, — что Земля в точке своей орбиты, ближайшей к звезде, неподвижна; наведем телескоп на эту звезду так, чтобы ее изображение находилось в центре поля зрения телескопа. Затем придадим Земле ее обычную скорость движения по орбите ($v = 30$ км/час). Тогда за время τ , пока свет от звезды

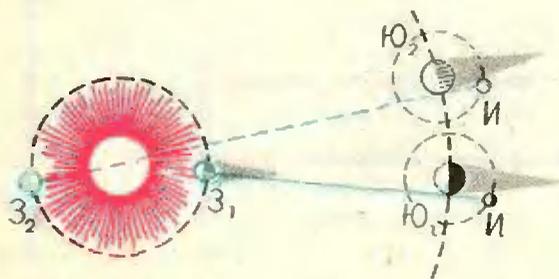


Рис. 1

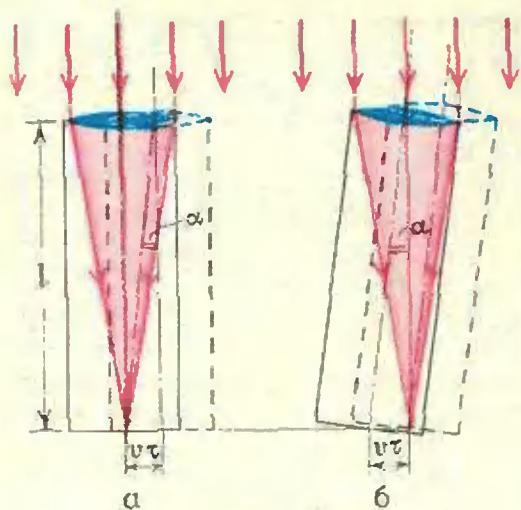


Рис. 2.

будет распространяться в трубе телескопа ($\tau = \frac{l}{c}$, где c — скорость света, l — длина трубы), Земля пройдет по орбите путь, равный $v\tau$, и на такое же расстояние изображение звезды сдвинется из центра поля зрения (рис. 2, а). Чтобы вернуть изображение звезды на место, нужно, очевидно, наклонить телескоп в сторону движения Земли на такой угол α , чтобы $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v\tau}{l}$ (рис. 2, б). Так как $l = c\tau$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v\tau}{c\tau} = \frac{v}{c}$. Отсюда $c = \frac{v}{\operatorname{tg} \alpha}$. То же самое будет в про-

тивоположной точке земной орбиты, но телескопу нужно будет придать наклон в противоположную сторону. Таким образом, направления на одну и ту же звезду могут отличаться максимум на угол 2α . Измерения показали, что $2\alpha = 41''$. При астрономических наблюдениях телескоп, конечно, не наклоняют. Благодаря изменению направления скорости Земли изображение звезды будет в разные дни находиться в разных точках поля зрения телескопа и в течение года опишет эллипс. Большая ось этого эллипса будет видна из центра объектива под углом 2α . Зная угол α , Брайдей нашел скорость света и получил для нее значение 303 000 км/сек. Это было в 1728 году.

Однако ученые не были удовлетворены, им хотелось бы измерить недоступную прежде скорость света на Земле, не выходя за пределы родной планеты, с тем, чтобы все условия опыта находились под контролем. Решения этой задачи пришлось ждать сто двадцать лет.

В 1849 году французский физик Арман Ипполит Луи Физо придумал для этого довольно простой способ. Схема его такова (рис. 3). Луч света от источника S падает на полупрозрачную зеркальную пластину Π , отражаясь от нее, направляется через собирающие линзы к неподвиж-

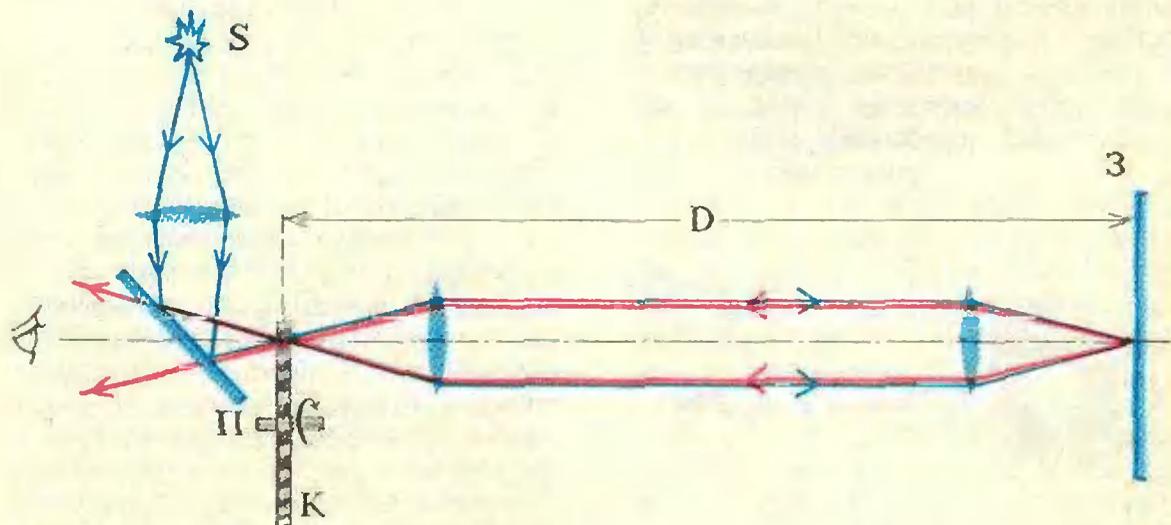


Рис. 3

ному зеркалу Z . Отразившись от зеркала Z , луч возвращается по тому же пути и через полупрозрачную пластину P попадает к наблюдателю. Если на пути луча поместить зубчатое колесо K , то наблюдатель может видеть свет от источника только в том случае, когда по пути к зеркалу Z и обратно луч проходит в промежутке между зубцами колеса K . Если же привести колесо K во вращение с такой угловой скоростью ω , чтобы луч, прошедший по пути от пластины P через промежутки между зубцами после отражения от зеркала Z попал на место зубца, соседнего с прорезью, то наблюдатель не увидит света. Произойдет, как говорят, первое затмение.

Если скорость вращения колеса удвоить, что наблюдатель увидит максимально яркий отраженный свет. Если скорость вращения увеличить в три раза — на пути отраженного от Z света окажется соседний зубец. Наступит второе затмение.

Если число зубцов на колесе равно z , то, очевидно, при первом затмении угловая скорость вращения колеса ω должна быть такой, чтобы за время $t = \frac{2D}{c}$, необходимое свету для прохождения расстояния от колеса K к зеркалу Z (это расстояние D называют базой) и обратно (рис. 3), колесо повернулось на угол $\varphi = 2\pi/2z$ (угол между центром зубца и центром соседнего просвета), то есть

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi \cdot c}{2z \cdot 2D} \quad \text{или} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{4zD}$$

(ν — частота вращения). Отсюда $c = 4\nu z D$.

В опыте, поставленном Физо, расстояние D равнялось 8,63 км, $z = 720$, частота, при которой наблюдалось первое затмение, $\nu = 12,5$ об/сек. Из своих данных Физо получил значение $c = 315\,000$ км/сек.

В XVIII веке в физике продолжался спор между сторонниками двух теорий о природе света — волновой и корпускулярной. Согласно корпускулярной теории Ньютона свет сос-

тоит из мельчайших частичек — корпускул, которые вылетают из источника и распространяются прямолинейно во всех направлениях с громадной скоростью, и скорость эта тем больше, чем больше плотность среды. Последнее утверждение резко противоречит волновой теории, согласно которой скорость света в вакууме должна быть больше, чем в веществе. В 1838 году французский физик Доминик Франсуа Араго предложил провести опыт по измерению скорости света в среде (например, в воде). Сам Араго этот опыт не смог осуществить. Метод, которым пользовался Физо, не давал возможности измерить скорость света в веществе. В 1862 г. Жан Бернар Леон Фуко поставил опыт, принцип которого был предложен Араго. Метод Фуко основан на очень тщательных измерениях малых промежутков времени.

Свет от источника S , пройдя полупрозрачную зеркальную пластину P и линзу L , отражался от плоского зеркала Z_1 к вогнутому сферическому зеркалу Z_2 и после этого попадал к наблюдателю в точку S' (рис. 4). Зеркало Z_1 могло вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Расстояние между Z_1 и Z_2 (длина базы) было равно фокусному расстоянию зеркала Z_2 , то есть половине его радиуса, который составлял 4 м. Благодаря этому наблюдатель видел отраженный от P луч всегда в одном и том же месте, независимо от положения зеркала Z_1 , если только оно покоилось. Но когда зеркало Z_1 вращалось, то за время, пока свет проходил от Z_1 к Z_2 и обратно, зеркало Z_1 успевало повернуться на некоторый угол, и направление прямого луча (падающего на зеркало Z_1 после прохождения пластины P и линзы L) не совпадало с направлением обратного луча (прошедшего путь $Z_2 Z_1$ и отраженного зеркалом Z_1 к пластине P). В результате изображение источника, фиксируемое наблюдателем, смещалось по отношению к изображению, видимому при неподвижном зеркале, в точку S_1 . Если

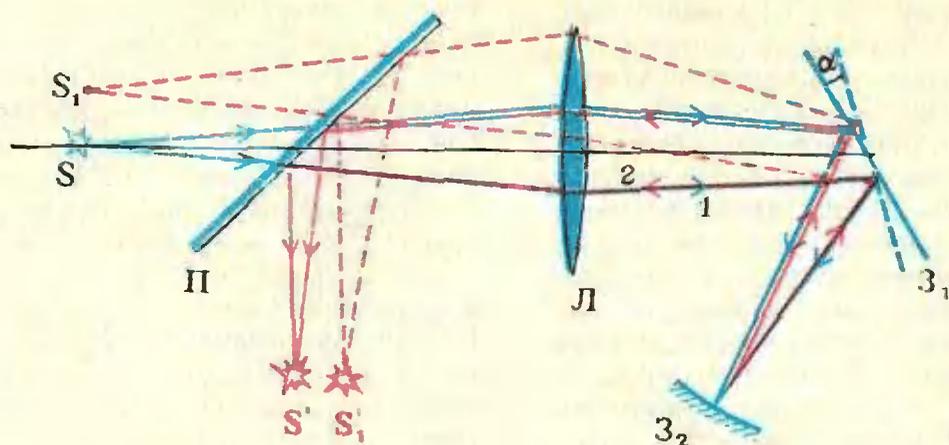


Рис. 4.

длина базы равна r , то путь $Z_1 Z_2$ и обратно свет проходит за время $\Delta t = \frac{2r}{c}$. За это время зеркало Z_1 , вращающееся с частотой n (об/сек), повернется на угол $\alpha = 2\pi n \cdot \frac{2r}{c}$. Поэтому по закону отражения угол между лучами 1 и 2 (см. рис. 4) на пути $Z_1 P$ будет равен $2\alpha = 8\pi n \cdot \frac{r}{c}$.

Таким образом, изображение S'_1 , которое видит наблюдатель при вращающемся зеркале Z_1 , оказывается смещенным от изображения S' , получаемого при неподвижном зеркале Z_1 , на угол, равный $8\pi n \cdot \frac{r}{c}$.

Пользуясь этим методом, Фуко получил для скорости света в воздухе значение $c = 298\,000$ км/сек.

В соответствии с первоначальным замыслом Араго Фуко осуществил при помощи своей установки измерение скорости света в воде. Для этого он несколько видоизменил свою установку, снабдив ее двумя симметрично расположенными сферическими зеркалами и поместив между одним из них и вращающимся зеркалом трубу с водой. Это позволило ему сравнить скорости света в воде и воздухе и найти, что скорость света в воде составляет $\frac{3}{4}$ от ее величины в воздухе. Этот результат был последним ударом по корпускулярной теории света, выдвинутой Ньютоном.

Методы, которыми пользовались Физо и Фуко, позволяли измерить скорость света с точностью до ± 500 км/сек.

В 1873 году Альфред Корню, повторивший опыт Физо, измерил скорость света с точностью до ± 200 км/сек.

В 1877 году американский физик Альберт Майкельсон, усовершенствовав схему Фуко, провел серию опытов и измерил скорость света с точностью до ± 50 км/сек.

Но Майкельсон не удовлетворился полученным результатом. С 1877 года и до конца своей жизни он неоднократно возвращался к измерению скорости света, непрерывно совершенствуя свою установку. Полученное Майкельсоном значение $c = 299\,796 \pm 4$ км/сек считалось долгое время наиболее точным.

В проблеме измерения скорости света опыты Майкельсона завершили этап, который можно назвать классическим. Но еще до окончания работ Майкельсона были поставлены новые эксперименты, уже на новой технической и идейной основе, обеспеченной бурным развитием физики. Эти эксперименты продолжают вплоть до настоящего времени; их целью является установление наиболее точного значения скорости света.

Современные методы измерения скорости света можно разделить на

две группы. К первой относятся те, которые используют ту же идею, что Фуко и Физо, то есть измеряют время, за которое свет проходит известное расстояние. Это так называемые прямые методы. Благодаря возможностям точного измерения очень малых промежутков времени, которые представляет сейчас радиотехника, точность прямых методов значительно увеличилась.

Можно назвать и другие прямые методы.

1) Радиолокационный — по измерению времени, за которое радиоволна, излученная локатором, возвращается к приемнику, пройдя известное расстояние до отражателя и обратно.

2) Измерение времени пролета γ -квантов между двумя счетчиками.

Второй группой методов являются косвенные, основанные на независимом измерении частоты и длины волны света ($c = \lambda \cdot \nu$).

К косвенным методам относится также определение скорости света по отношению электромагнитных и электростатических единиц.

К настоящему времени скорость света измерена с большой точностью. Наиболее точное значение скорости света, равно $(299792,5 \pm 0,2)$ км/сек.

Литература

Элементарный учебник физики под редакцией академика Г. С. Ландсберга, т. III, М., «Наука», 1970.

Г. С. Ландсберг, Оптика, М., Гостехиздат, 1957.

М. Льюэлли, История физики, М., «Мир», 1970.

Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман, Механика, М., «Наука», 1971.

Б. Джефф, Майкельсон и скорость света, М., ИЛ, 1963.

П. С. Кудрявцев, История физики, М., Учпедгиз, 1948.

Физический энциклопедический словарь, т. 4, М., «Советская энциклопедия», 1965.

Детская энциклопедия, т. 3, изд-во АПН РСФСР, 1959.

Задачи о прямых линиях

1. Дан треугольник ABC , P — середина стороны BC . Опустим высоту AD и проведем отрезок PH параллельно AD так, чтобы H и A лежали по одну сторону от BC , и $2PH = AB + AC$. Проведем теперь прямую HT , пересекающую AD в точке T , так, чтобы углы PHT и HBP были равны. Доказать, что TD равно одной из сторон AB, AC .

2. Через вершины треугольника ABC , имеющего площадь S , проведены прямые линии, делящие углы A, B, C треугольника на углы $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ соответственно. Найти площадь треугольника, ограниченного этими тремя прямыми. При каком условии эти прямые пересекаются в одной точке?

3. Дан треугольник ABC и точка O вне этого треугольника. Провести через точку O прямую l так, чтобы отрезок BC делил пополам площадь треугольника BOD , где D — точка пересечения l и AC .

4. Через точку P , лежащую внутри угла BAC , провести прямую l , пересекающую стороны AB и AC в точках M и N так, чтобы сумма отрезков AM и AN была заданной. Далее, провести прямую l так, чтобы эта сумма была минимальной.

5. Дан треугольник ABC ; D, E, F — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Пусть биссектриса угла DFE пересекает отрезок DE в точке G . Доказать, что если AG перпендикулярно к DF , то FG — диагональ квадрата, сторона которого равна DG .

6. Доказать, что расстояния от вершин ромба до данной точки O однозначно определяют размеры ромба.



ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ СУММЫ РАДИКАЛОВ

Л. Н. Камнев

Напомним, что число называется *рациональным*, если оно равно $\frac{m}{n}$, где n и m — целые числа, и *иррациональным* в противном случае. Все знают, что число $\sqrt{2}$ иррационально. Легко доказать и более общее утверждение: если натуральное число k — не полный квадрат, то число \sqrt{k} иррационально. Заметим, что k можно представить в виде b^2a , где a и b — натуральные, причем a не делится на квадрат целого числа (как говорят, «свободно от квадратов»), то есть a равно простому числу или произведению различных простых чисел: $a = p_1 p_2 \dots p_r$; $r \geq 1$. Утверждение, что число $\sqrt{k} = b\sqrt{a}$ иррационально, сводится к следующему: не существует ненулевых целых чисел b_1 и b_2 таких, что $b_1\sqrt{a} + b_2 = 0$. Действительно, если такие b_1 и b_2 существуют, то $b_1^2 a = b_2^2$. Но это равенство противоречит теореме о единственности разложения натурального числа на простые множители: в правую часть p_1 входит в четной степени, а в левую — в нечетной.

В этой заметке мы докажем, что если b_1, b_2, \dots, b_n — ненулевые целые числа, a_1, a_2, \dots, a_n — натуральные числа, свободные от квадратов, то

$$b_1 \sqrt{a_1} + b_2 \sqrt{a_2} + \dots + b_n \sqrt{a_n} \neq 0.$$

Вплоть до $n=4$ это легко доказать от противного, несколько раз возвышая обе части (сгруппированные подходящим образом) в квадрат. В общем случае мы проведем доказа-

тельство индукцией по числу различных простых чисел p_1, \dots, p_N , делящих хотя бы одно из чисел a_i . Как это часто бывает, удобнее доказать по индукции более сильное утверждение (интересное и само по себе):

существуют такие целые числа $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_r, d_r$, что $d_i \neq 0$, $c_i \geq 1$, все простые делители чисел c_i содержатся среди чисел p_1, \dots, p_N и произведение

$$(d_1 \sqrt{c_1} + \dots + d_r \sqrt{c_r}) \times (b_1 \sqrt{a_1} + \dots + b_n \sqrt{a_n})$$

является ненулевым целым числом.

Обозначим $b_1 \sqrt{a_1} + \dots + b_n \sqrt{a_n}$ через S , а искомую сумму $d_1 \sqrt{c_1} + \dots + d_r \sqrt{c_r}$ — через S' .

Если $N=1$, то S имеет вид $b_1 \sqrt{p_1} + b_2 \sqrt{1}$ и можно взять $S' = b_1 \sqrt{p_1} - b_2$: мы доказали выше, что $SS' = b_1^2 p_1 - b_2^2 \neq 0$. Предположим теперь, что $N \geq 2$ и что наше утверждение справедливо для всех меньших значений N .

Будем обозначать буквами S_1, S_2, \dots, S_r суммы вида $\beta_1 \sqrt{\alpha_1} + \dots + \beta_m \sqrt{\alpha_m}$, где β_i — целые числа, α_i — свободные от квадратов натуральные числа, все простые делители которых содержатся среди чисел p_1, \dots, p_{N-1} ; S_1, S_2, \dots, S_r , если не оговорено противное, могут равняться нулю.

Сумму S можно записать в виде $S = S_1 + S_2 \sqrt{p_N}$, где $S_2 \neq 0$. По предположению индукции, существует такая сумма S_3 , что $f = S_3 S_2$ — ненулевое целое число. Произведе-

ние S_3S имеет вид

$$S_3S = S_3S_1 + f \sqrt{p_N} = S_4 + f \sqrt{p_N}$$

с $f \neq 0$. Остается доказать, что

$$S_5 = (S_3S_4 - S_3f \sqrt{p_N})S =$$

$$= S_4^2 - f^2 p_N \neq 0.$$

Если $S_4 = 0$, то это очевидно. Предположим теперь, что $S_4 \neq 0$. Пусть $S_4 = \beta_1 \sqrt{\alpha_1} + \dots + \beta_m \sqrt{\alpha_m}$; если $m = 1$, то есть $S_4 = \beta_1 \sqrt{\alpha_1}$; то $S_4^2 - f^2 p_N = \beta_1^2 \alpha_1 - f^2 p_N \neq 0$ (действительно, $\beta_1^2 \alpha_1$ делится на четную степень p_N , а $f^2 p_N$ — на нечетную).

Если же $m > 1$, то можно записать S_4 в виде $S_6 + S_7 \sqrt{p}$, где p — одно из простых чисел p_1, \dots, p_{N-1} , $S_6 S_7 \neq 0$, и числа, стоящие под знаками корней в суммах S_6, S_7 , не делятся на p . Тогда

$$S_5 = S_6^2 + S_7^2 p - f^2 p_N +$$

$$+ 2S_6 S_7 \sqrt{p} \neq 0$$

ввиду предположения индукции, поскольку $2S_6 S_7 \neq 0$.

Снова, по предположению индукции, найдется S_8 такое, что $S_5 S_8$ — ненулевое целое число g . Возьмем $S' = S_8 (S_3 S_4 - S_3 f \sqrt{p_N})$. Тогда $SS' = S_5 S_8 = g$.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что если b_i — любые рациональные ненулевые числа и a_i — натуральные числа, большие 1 и свободные от квадратов ($i = 1, 2, \dots, n$; $n \geq 1$), то число

$$b_1 \sqrt{a_1} + b_2 \sqrt{a_2} + \dots + b_n \sqrt{a_n} \quad (*)$$

иррационально.

Упражнения

1. «Освободитесь от иррациональности в знаменателе» выражения $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$, то есть представьте это число в виде (*). То же для $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{9} - \sqrt{11} + \sqrt{13}}$.

2. Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt{5}$ иррационально.

3. Попробуйте обобщить ваши результаты на сумму корней различных степеней (не обязательно квадратных).

(Окончание, начало см. стр. 19).

Эту оценку можно уменьшить примерно в 4 раза. Для этого нужно заметить, что схему (см. рис. 3) можно еще упростить (рис. 8). При этом доказательство 8-универсальности схемы, по существу, не меняется.

Эту схему также можно обобщить на произвольное четное число входов (рис. 9). В случае нечетного числа входов можно применить похожую схему (рис. 10). Эти две схемы дают возможность строить n -универсальные схемы при любом n (не только при целых степенях двойки) постепенным переходом к схемам с меньшим числом входов. Так построенная схема содержит

$$n([\log_2 n] + 1) - 2^{1+[\log_2 n]} + 1 \approx$$

$$\approx n \cdot \log_2 n$$

переключателей.

Итак, получены следующие ограничения для числа $M(n)$ переключателей в минимальной n -универсальной схеме:

$$n(\log_2(n+1) - \log_2 e) < \log_2(n!) \leq$$

$$\leq M(n) \leq n \cdot ([\log_2 n] + 1) -$$

$$- 2^{1+[\log_2 n]} + 1.$$

При $n = 2, 3, 4$ нижняя оценка $\log_2(n!)$ совпадает с верхней, при $n \geq 5$ — отличается. Оказывается, что при $n = 5$ с истинным значением $M(5) = 8$ совпадает именно верхняя оценка. Поэтому можно предположить, что верхняя оценка более точно оценивает $M(n)$, однако этот вопрос не выяснен и, видимо, является очень трудным.

При формулировке задачи и написании этой статьи были использованы результаты советских математиков Ю. П. Офмана, М. И. Кратко и Э. Я. Гринберга.

РАДИОАКТИВНАЯ ПАМЯТЬ

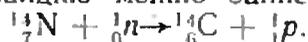
В. И. Кузнецов

Однажды строители прокладывали дорогу и нашли древнюю пещеру, засыпанную вулканическими породами. В ней оказался склад обуви — триста пар сандалий из плетеной травы. Когда, в каком веке был заложен этот удивительный склад? Ответа не было. Его удалось получить только через несколько лет, когда был разработан способ определения возраста изделий из дерева, кости и других материалов, содержащих углерод.

Чтобы понять, как определяется время создания таких изделий, обратимся к ядерным процессам, протекающим в верхних слоях атмосферы (на высоте около 15 километров).

Земная атмосфера непрерывно бомбардируется космическими лучами. Основную часть космического

излучения составляют быстро движущиеся протоны — ядра атомов водорода. Энергия их огромна — она достигает миллиардов электрон-вольт. Проходя верхние слои атмосферы, протоны сталкиваются с ядрами атомов, входящих в состав воздуха. При столкновении атомные ядра испускают нейтроны и другие частицы. Образовавшиеся нейтроны, в свою очередь, взаимодействуют с веществом атмосферы, чаще всего с азотом. В некоторых случаях нейтрон выбивает из ядра азота (состоящего из 7 протонов и 7 нейтронов) протон и занимает его место. В результате азот превращается в изотоп углерода, в ядре которого заключено 6 протонов и 8 нейтронов. Происходящую ядерную реакцию можно записать так:



В новом атоме на два нейтрона больше, чем в ядре самого распространенного изотопа углерода ${}^{12}\text{C}$. Тяжелый углерод ${}^{14}\text{C}$ называют радиоуглеродом. Ядра радиоуглерода испускают электроны (бета-частицы) и превращаются в азот: ${}^{14}\text{C} \rightarrow {}^{14}\text{N}$. Скорость этого процесса характеризуется временем, за которое половина первоначального числа атомов ${}^{14}\text{C}$ превращается в азот. Это время называют периодом полураспада и обычно обозначают $T_{1/2}$. Для изотопа ${}^{14}\text{C}$ $T_{1/2} = 5600$ лет. Если пройдет еще $T_{1/2}$ лет, то из оставшейся половины атомов половина снова распадется и останется одна четверть — $(1/2)^2$, а за время t , равное n периодам полураспада,



Рис. 1. Этим индейским сандалиям примерно 9000 лет.

сохранится только $(1/2)^n$ часть атомов ^{14}C :

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (1)$$

Здесь N_0 — число атомов радиоуглерода в начальный момент, N — число их в момент времени t .

Период полураспада радиоуглерода — величина того же порядка, что и возраст человеческой культуры. История располагает достоверными данными лишь в пределах 5000 лет. Зная число распадов радиоуглерода в единице объема или веса за единицу времени в атмосфере, воде и материалах живой природы, нетрудно подсчитать, сколько его распадается за год и сколько его содержится на Земле. Расчеты показали, что на Земле существует всего около 60 тонн радиоуглерода.

На тысячу миллиардов атомов земного углерода приходится один атом ^{14}C . Атомы радиоуглерода вместе с обычными атомами углерода усваиваются растениями, а оттуда попадают в организмы животных и человека. В любом живом организме радиоуглерод непрерывно распадается и пополняется. В каждом грамме углерода живого организма происходит примерно 14 распадов атомов радиоуглерода в минуту. Концентрация изотопа ^{14}C , как правило, одинакова во всем углероде, входящем в состав живых организмов.

Как только организм погиб, он выпадает из цепи идущего на Земле круговорота радиоактивного углерода. В такой организм новый радио-



Рис. 3. Обрывки холста, в который был завернут один из рукописных свитков, найденных вблизи Мертвого моря. Их возраст около 2000 лет.

углерод не поступает, а накопленный ранее распадется. Количество радиоуглерода в умершем организме через 5 600 лет уменьшится вдвое. Если какой-нибудь предмет сделан из дерева, срубленного примерно 5 600 лет назад, то в грамме углерода, выделенного из него, счетчики радиоактивных излучений зарегистрируют уже не 14, а около 7 распадов в минуту. По числу распадов можно рассчитать возраст предметов, сделанных из дерева, а также костей животных и остатков растений. Для этого нужно воспользоваться формулой (1). Из этой формулы следует, что

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}};$$

$$\lg \frac{N}{N_0} = \frac{t}{T_{1/2}} \lg \left(\frac{1}{2}\right); \quad (2)$$

$$t = T_{1/2} \frac{\lg(N/N_0)}{\lg(1/2)} = T_{1/2} \frac{\lg(N_0/N)}{\lg 2}.$$

Число распадов в минуту A пропорционально числу атомов N . Так, в начальный момент времени $A_0 = kN_0 = 14$, а в момент времени t , когда число атомов равно N , $A = kN$. Следовательно,

$$N = A/k, \quad N_0 = A_0/k = 14/k,$$

и
$$N_0/N = 14/A$$

$$t = T_{1/2} \frac{\lg(14/A)}{\lg 2} = 18400 \lg(14/A).$$

Здесь t — возраст в годах.

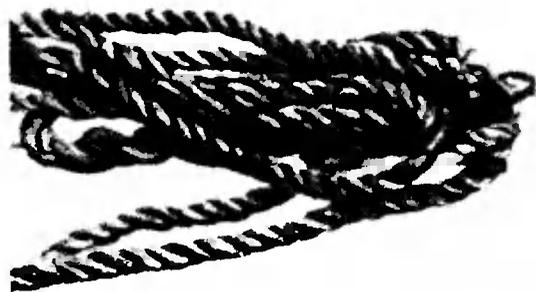


Рис. 2. Этой веревкой пользовались древние жители Перу около 3000 лет назад.

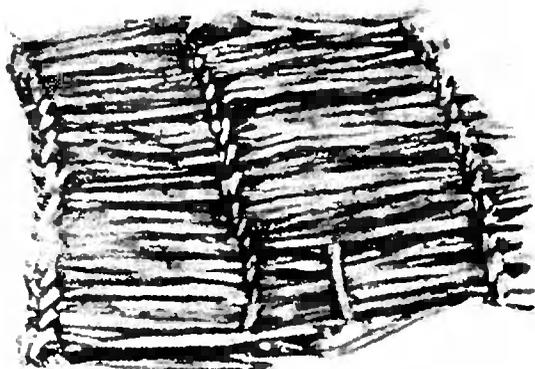


Рис. 4. Камышовая циновка из Невады (США). Ей около 3000 лет.

Когда в счетчик бета-частиц помещали углерод из найденных в пещере сандалий, величина A оказалась равной 4,5 распада в минуту. Отсюда следует, что возраст находки примерно 9 000 лет.

Измерение числа распадов ^{14}C — сложная задача. Для этой цели углерод переводят в одно из газообразных соединений — углекислый газ (CO_2) или метан (CH_4). Газом наполняют счетчик радиоактивных излучений. Он-то и регистрирует каждый распад радиоуглерода. Но счетчик бета-частиц чувствителен и к другим частицам: мезоны, гамма-кванты и некоторые другие частицы, образуемые космическими лучами, дают импульсы, неотличимые от импульсов, вызываемых бета-частицами. Поэтому приходится защищать счетчик толстым слоем железа. Однако получить железо, полностью очищенное от радиоактивных примесей, очень сложно. Поэтому между счетчиком и железной защитой помещают цилиндр (он падет на счетчик), заполненный ртутью. Двойная «шуба» надежно укрывает счетчик почти от всех излучений, которые могут искажать результаты измерений, но только не от мезонов. Мезоны слабо взаимодействуют с веществом и проникают даже через такую защиту. Чтобы исключить мезонные импульсы, основной счетчик, наполненный изучаемым газом, окружают со всех сторон вспомогательными счетчиками. Преж-

де, чем попасть в центральный счетчик, мезон побывает в одном из счетчиков окружения. При этом электронная аппаратура регистрирует два одновременных импульса в центральном и боковом счетчиках. Эти двойные импульсы исключаются при подсчете.

Благодаря такой сложной аппаратуре удастся измерить очень малые концентрации радиоуглерода и надежно установить возраст предметов, пролежавших под землей или на дне океана до 50 000 лет.

С какой же точностью можно определить возраст углеродным методом? Количество радиоуглерода в атмосфере пропорционально потоку первичных протонов, падающих на Землю. Поток протонов меняется в зависимости от условий на Солнце. Он тем больше, чем меньше солнечная активность. Дело в том, что в периоды высокой солнечной активности магнитное поле Солнца возрастает и захватывает часть космических протонов, которые попали бы на Землю в годы спокойного Солнца.

Пришлось проверить точность «углеродных часов». Проверляли по предметам, возраст которых был известен, — деревянным изделиям Древнего Египта, мумиям фараонов. Еще более точная проверка осуществлялась по годичным кольцам деревьев. На Земле сохранились деревья, возраст которых достигает 3 000 лет. Такой срок живут американские секвойи. Распилив ствол дерева-долгожителя, можно сосчитать годичные кольца и взять вещество, например, из слоя, соответствующего трехтысячному кольцу (если считать от края к сердцевине). Углерод из выделенного вещества дерева усвоило 3 000 лет назад. По радиоактивности углерода можно определить удельное содержание атомов радиоуглерода ^{14}C — величину N . Из формулы (2) имеем:

$$N_0 \text{ (3000 лет назад)} = \frac{N}{(1/2)^{\frac{t}{T_{1/2}}}} = N \cdot 2^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Оказалось, что концентрация углерода за долгие годы изменялась незначительно. Однако при определении возраста построек возникают большие трудности. Дом может быть построен из древесины, которая уже была использована в другом сооружении. Кроме того, и возраст самого дерева в некоторых случаях играет большую роль. Как-то ученые решили определить «возраст» придорожной травы. Счетчики зарегистрировали очень малую долю радиоуглерода в веществе придорожных растений. Расчеты привели к ошеломляющему результату — «возраст» травы оказался равным нескольким тысячам лет! Объяснение нашли быстро. Выхлопные газы автомобилей, проходящих по дороге, содержат углерод без тяжелого изотопа ^{14}C . Возраст нефти, из которой получают бензин, измеряется миллионами лет, и естественно, что весь радиоуглерод в ней распался.

Определение возраста обугленного склада доисторических времен — одна из первых археологических проблем, решенных физиками с помощью радиоуглеродного метода. Этот метод помог определить сроки древних вулканических извержений, установить даты ледниковых периодов.

Наступая на континент, льды уничтожали растительность, люди уходили к югу, отметив свой путь углями остывших очагов. Стволы древних деревьев, стоянки человека сохранились до наших дней под толщей ледниковых наносов. Но только после появления радиоуглеродного метода был установлен «график» движения льдов.

Измерения показали: за последние 40 тысяч лет на Земле было три ледниковых периода. Самый поздний — примерно 11 400 лет назад. С тех пор на Земле относительно тепло.

Задачи арифметические

1. Найти все числа x такие, что $x^3 = 7p + 1$, где p — простое число

2. Нечетные числа расположены в порядке возрастания $1, 3, 5, 7, \dots$; после чего разбиты на группы, содержащие $1, 2, 3, 4, \dots$ числа, то есть так: $(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$. Доказать, что сумма чисел, принадлежащих группе из r чисел, равна r^3 .

Далее, пусть те же числа разбиваются на группы, состоящие из $1, 1, 4, 3, 9, 6, \dots, r^2, \frac{r(r+1)}{2}, (r+1)^2, \dots$ чисел.

Доказать, что сумма чисел, находящихся в группе из r^2 чисел, равна r^3 .

3. Доказать, что существует бесконечно много четверок натуральных чисел a, b, c, d таких, что $(a^3 + b^3)(c^3 + d^3)$ можно представить в виде $M^3 + N^3$, где M, N — натуральные числа.

4. Сколько чисел, делящихся на 37, можно получить из числа 33337777 перестановками его цифр?

5. Найти рациональные числа x и y такие, что $0 < x < 3$, $y > 4$, и $x^3 + y^2 = 3^3 + 4^3$.

... и алгебраические

6. Написать уравнение, корнями которого являются отношения корней уравнения $y^3 + py + q = 0$.

7. Обозначим через t_k среднее арифметическое k -х степеней положительных чисел a_1, \dots, a_n . Доказать, что последовательность $t_1, t_2^2, \dots, t_k^{1/k}, \dots$ не убывает.



А. С. Варпаховский, А. Н. Виленкин

Фотографии и рисунки снежинок можно найти во многих учебниках физики в главах, в которых рассказывается о симметрии. Но этим и ограничивался до недавнего времени интерес ученых к снежным кристаллам. Серьезное изучение зарождения, роста и структуры снежных кристаллов началось не так давно. Интерес к снежным кристаллам был связан в основном с изучением образования дождя и явлений, происходящих в облаках. Оказалось, что большая часть дождевых капель начинает свою жизнь как снежные кристаллы, тающие прежде чем они упадут на землю. Однако только холодные, находящиеся на большой высоте перистые облака состоят из кристалликов льда. В основном же облака представляют собой скопления маленьких водяных капелек, удерживающихся в воздухе так же, как частички дыма. Долгие годы оставалось загадкой, как эти капельки вырастают до размеров, достаточных для того, чтобы они упали на землю. Оставалось загадкой и то, что часто эти капельки «отказывались» замерзать, хотя температура облака была намного ниже нормальной температуры замерзания воды, то есть ниже 0°C .

Сейчас мы знаем, что переохлажденное облако остается стабильным до тех пор, пока в нем не появится хотя бы небольшое количество маленьких кристалликов льда, зарождающихся на частичках земной пыли. Молекулы воды, попавшие на кристаллик льда, образуют с ним прочную связь, разорвать которую довольно трудно. Молекулы же воды, которые конденсируются на капле, оторвать сравнительно легко — теплота испарения меньше энергии, необходимой для отрыва молекулы воды от кристаллика льда. Поэтому если облако состоит из капелек воды и кристалликов льда, то кристаллы льда растут гораздо быстрее, чем капли. Более того, благодаря росту кристалликов льда уменьшается влажность окружающего воздуха. Это приводит к тому, что водяные капли постепенно испаряются и исчезают. В то же время кристаллики льда вырастают до размеров, достаточных для их падения на землю. Падая, несколько кристалликов могут объединяться, образуя снежинку.

Хотя снежные кристаллы многообразны, их можно классифицировать по трем основным формам; шестигонные призматические столби-

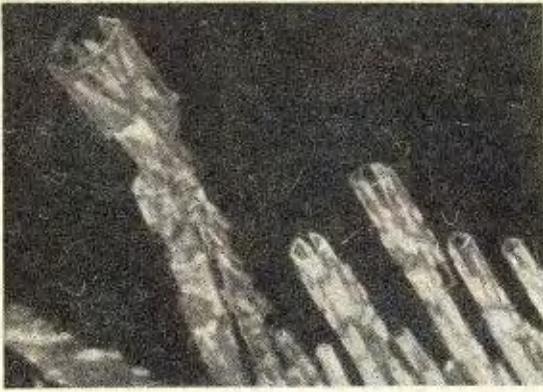


Рис. 1 а.

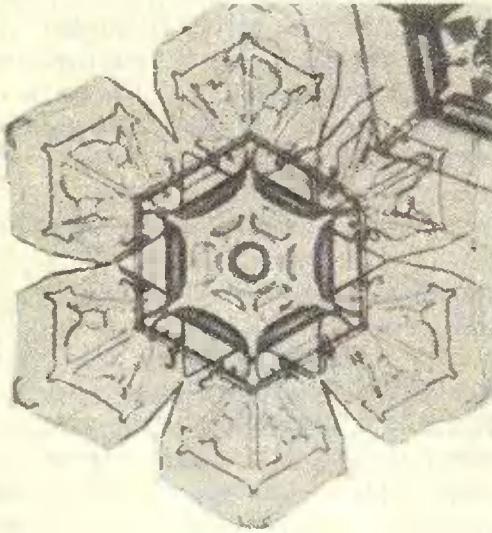


Рис. 1 б.

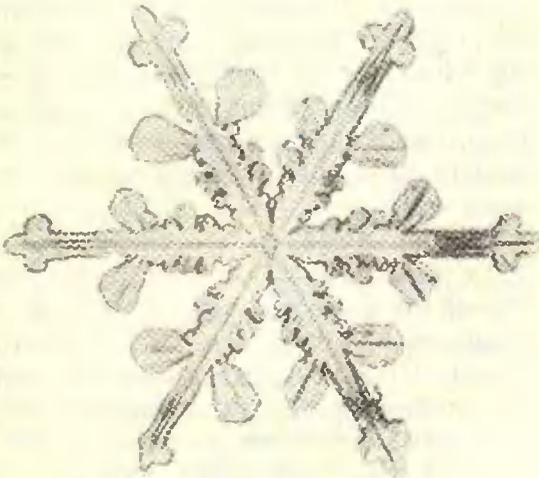


Рис. 1 в.

ки (рис. 1а), тонкие шестиугольные пластины (рис. 1б) и разветвленные звезды (рис. 1в). Нетрудно объяснить шестигранную форму снежных кристалликов и снежинок. Изучение кристаллов льда с помощью рентгеновских лучей показало, что молекулы воды в кристалле льда расположены так, что каждая из молекул окружена шестью соседями. Центры этих молекул образуют правильный шестиугольник (рис. 2). Что же касается причин различия форм кристаллов, то до недавнего времени ученые не могли прийти к единому мнению. По некоторым гипотезам форма кристалликов должна в основном определяться степенью пересыщения окружающего воздуха парами воды, а не температурой облака. Но исследования показали, что кристаллы различной формы вырастают при разных температурах.

Высокие перистые облака, температура которых ниже -30°C , состоят в основном из снежных кристаллов в форме призматических столбиков длиной около половины миллиметра. Облака на средних высотах, температура которых изменяется от -15° до -30°C , состоят из кристаллов в форме призм и пластин. В низких облаках, температура которых

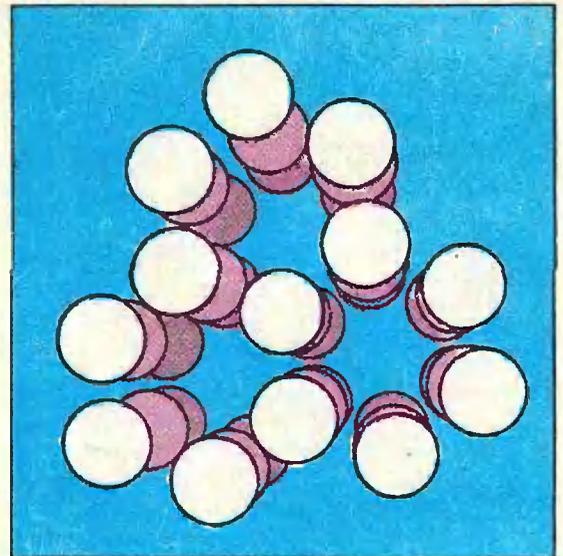


Рис. 2.

колеблется от -5°C до 0°C , можно встретить кристаллы в виде шестиугольных пластин, коротких призм и поражающих своей красотой звезд, имеющих диаметр порядка нескольких миллиметров. Эти звезды являются основой снежинок. При температуре в несколько градусов ниже нуля кристаллики слипаются, образуя снежинки.

Все это говорит о том, что форма кристаллов определяется в основном температурой, при которой они вырастают. Это подтвердили и эксперименты по выращиванию кристаллов льда в лаборатории. Кристаллы льда выращивались в специальной камере, в которой строго контролировалась температура и количество водяных паров. В качестве затравки использовалась тонкая нить. Температура в камере в различных участках вдоль нити была разной. На рисунке 3 показана фотография участка нити, обросшей кристаллами. Размер этого участка около 6 см. Справа на рисунке указана температура в камере. В верхней части нити выросли в основном мельчайшие шестиугольные пластинки. Ниже — шестиугольные призмы, затем шестиугольные пластины, разветвленные звезды и опять шестиугольные пластины. При температурах ниже -25°C вновь образовывались шестиугольные призмы.

Опыты показали, что именно температура определяет форму кристалла. Количество же водяных паров влияет на скорость роста. Однако до сих пор остается невыясненной точная природа роста снежных кристаллов.

Очень интересно изучение роста снежных кристаллов на земле. Часто зимой при резком потеплении ветки деревьев и стены домов покрываются инеем. Облака, в которых зарождаются снежинки, трудно доступны. Иней же легко доступен и за ним можно наблюдать во время его образования. Иней появляется обычно на предметах, имеющих большую теплоемкость и малую теплопроводность. При рез-

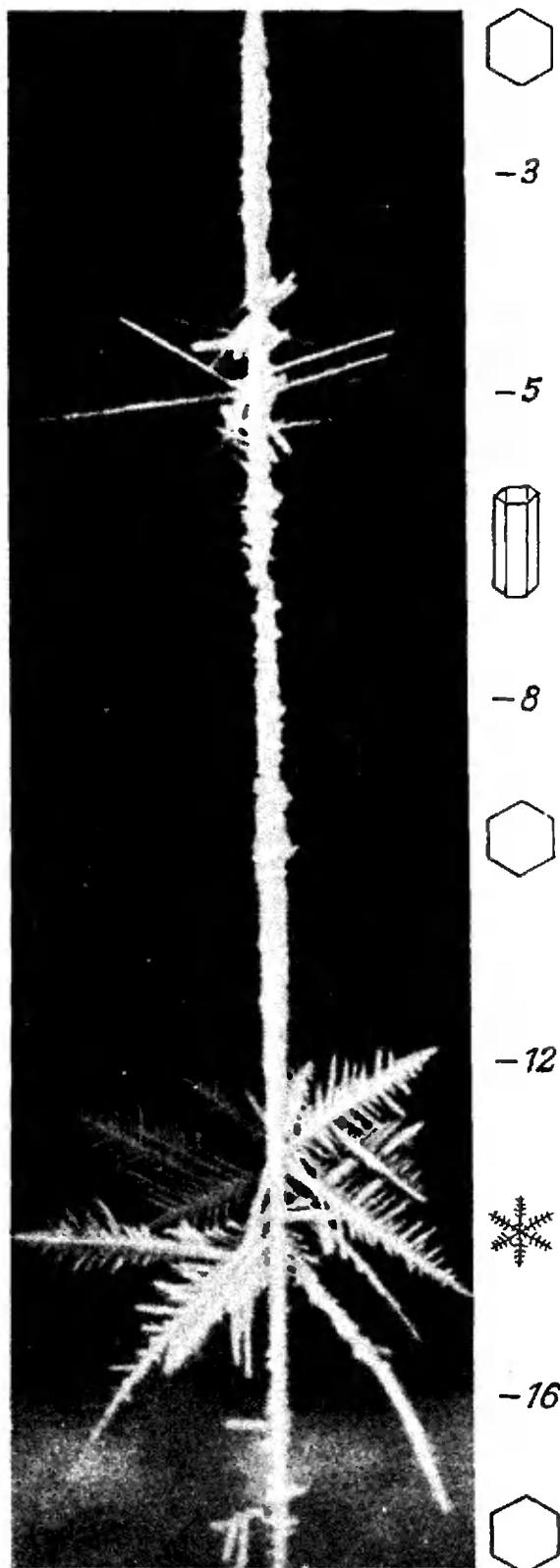


Рис. 3.

ком потеплении температура этих предметов оказывается ниже температуры окружающего воздуха, и на них конденсируются водяные пары, находящиеся в воздухе. Если паров в воздухе мало, то получают красивые пушистые хлопья. При большой влажности воздуха холодные предметы покрываются коркой льда. Вода просто конденсируется на холодных предметах и затем замерзает.

Особенно интересны узоры, которыми покрываются зимой окна квартир, автобусов и трамваев. При резком похолодании температура окон становится ниже температуры воздуха в помещении. На них и оседают молекулы пара, находящиеся во влажном воздухе в комнате, образуя красивые узоры. При этом тоже важно, чтобы воздух в комнате был не очень влажным. В противном случае пар сначала конденсируется на стекле и затем замерзает, образуя слой льда. Узоры не появляются на окне, если открыта форточка. В этом случае температура воздуха в комнате у стекла понижается, став такой же, как температура самого стекла. В ледяных узорах, вырастающих на стекле, можно увидеть большинство форм, которые могут принимать снежные кристаллы.

Наблюдать за ростом снежных кристаллов на окнах вы можете и у себя дома. Однако, к сожалению, узоры на окнах недолговечны, да и трудно менять условия их роста. Но можно «выращивать» узоры, очень похожие на ледяные, пользуясь не водой, а растворами гипосульфита (он продается в магазинах в отделах фототоваров) или карловарской соли (ее можно купить в аптеке). Эти узоры долговечны, но внешне виду не отличаются от ледяных и, глядя на них, можно менять условия роста — скорость подвода или отвода тепла, концентрацию раствора (изменение концентрации раствора соответствует изменению влажности воздуха) и т. д. За ростом кристаллов, образующих узоры, можно следить с помощью микроскопа.

Получить узор можно так. Сначала приготовьте насыщенный раствор вещества, с которым вы будете работать. Протрите этим раствором стекло и поставьте его под вентилятор. Примерно через 5 минут вода испарится, а на стекле получится узор. Самое трудное здесь — это хорошо смочить стекло. Дело в том, что обычно вода не смачивает поверхность стекла и не растекается по ней, а образует капельки. Тогда вместо узоров получатся пятна, в которых останется просто высохший осадок.

Если не обдуть стекло или налить на него много раствора, то вместо узора вы получите куски кристаллов, они вырастут «снизу» (от поверхности стекла) и будут возвышаться над стеклом. Нам же надо, чтобы кристаллы выросли небольшие и сразу на всей поверхности стекла. Чтобы раствор смачивал стекло, надо поверхность стекла тщательно очистить бензином или спиртом (можно взять и одеколон). Еще лучше пользоваться не водным, а спиртовым раствором соли. Конечно, с первого раза узор может у вас не получиться — не отчаивайтесь. Помните, что любой физический опыт может потребовать нескольких попыток.

Полученные вами искусственные узоры можно и сфотографировать. Удобны два способа фотографирования.

Первый — обычный: узоры фотографируются на пленку, а потом печатаются на фотобумагу.

Второй — не совсем обычный. Узоры выращиваются на узкой полоске стекла. Эта полоска вставляется в фотоувеличитель вместо пленки, и производится печать прямо на бумагу. Кристаллики, образующие узоры, непрозрачны и в проходящем свете выглядят черными (на отпечатке после проявления — белыми). Места, где кристаллов нет, пропускают свет и на отпечатке получаются черными. Именно так был получен узор, помещенный на обложке нашего журнала. Он был выращен из раствора карловарской соли.

П.Р.КАНТОР Ж.М.РАББОТ

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Здесь собраны некоторые задачи, связанные с понятием площади многоугольника. Мы дадим аксиоматическое определение площади многоугольника, перечислив те её свойства, которые нам нужны.

A1. Площадь многоугольника — положительное число.

A2. Площади равных (конгруэнтных) многоугольников равны.

A3. Если многоугольник разрезан на несколько частей, то его площадь равна сумме площадей этих частей.

A4. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. (Единицу масштаба мы считаем заданной; легко показать, что это произведение не зависит от того, какую именно сторону и соответствующую ей высоту мы возьмем.)

Буква *A* выбрана потому, что с нее начинается слово «Аксиома». Из этих четырех свойств-аксиом можно вывести все теоремы о площадях многоугольников, которые вы изучаете в школе.

Значительно труднее доказать, что, действительно, можно сопоставить каждому многоугольнику *M* на плоскости положительное число $S(M)$, его площадь, так, чтобы

выполнялись свойства **A1—A4**. Это верно, но в школьном курсе обычно не доказывается и считается очевидным. Вместо **A4** можно считать основным такое свойство, из которого выводится **A4**:

A4'. Площадь квадрата со стороной *l* равна l^2 .

Например:

а) площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту;

б) площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Подумайте, как доказать эти утверждения (то есть вывести из аксиом **A1—A4**).

Мы начнем с того, что докажем другую формулу для площади трапеции.

1. Площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, опущенный на нее из середины другой боковой стороны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данная трапеция ($AD \parallel BC$), *K* — середина стороны CD , KH — перпендикуляр, опущенный из точки *K* на прямую AB . Проведем через точку *K* прямую, параллельную прямой AB . Пусть *M* и *P* — точки ее

пересечения с прямыми BC и AD (рис. 1).

Параллелограмм $ABMP$ равен велик данной трапеции, так как пятиугольник $ABCKP$ является для них общим, а треугольник CMK равен треугольнику KPD , то есть трапеция и параллелограмм составлены из одинаковых частей. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания AB на высоту KH , утверждение доказано.

Последний абзац решения можно более формально записать так:

$$S_{ABMP} = S_{ABCKP} + S_{CMK}.$$

$S_{ABCD} = S_{ABCKP} + S_{KPD}$ (по построению),
 $\triangle KPD = \triangle CMK$ (по стороне и двум прилежащим углам),

поэтому

$$S_{\triangle KPD} = S_{\triangle CMK}.$$

следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{ABMP}.$$

Теперь предлагаем вам решить следующие ниже задачи. Они расположены в основном в таком порядке, что решение предыдущих задач помогает решить последующие. Некоторые из этих задач сопровождаются указаниями или даже решениями (как задача 1, которую мы разобрали выше). Впрочем, не обязательно в точности следовать этим указаниям: задачи могут допускать и другие решения, ничуть не хуже тех, которые мы имели в виду. Звездочкой отмечены наиболее трудные задачи.

2. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K (середина AB) соединена с

вершинами C и D . Найдите отношение площади треугольника KCD к площади трапеции.

3. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на четыре параллелограмма. Два из них пересекаются диагональю AC . Докажите, что два другие равновелики.

Указание. Воспользуйтесь тем, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

4. Через каждую вершину выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная его диагонали (рис. 2). Докажите, что полученный параллелограмм по площади вдвое больше четырехугольника.

5. Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников диагонали соответственно равны и пересекаются под равными углами, то четырехугольники равновелики.

6. В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка: вершина B соединена с серединой стороны DC , вершина A — с серединой стороны BC , вершина D — с серединой стороны AB и вершина C — с серединой стороны AD . Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками — параллелограмм и что его площадь в пять раз меньше площади параллелограмма $ABCD$ (рис. 3).

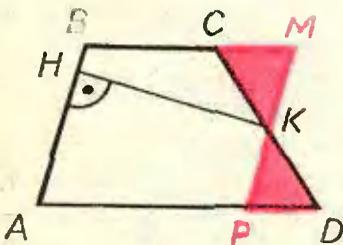


Рис. 1.

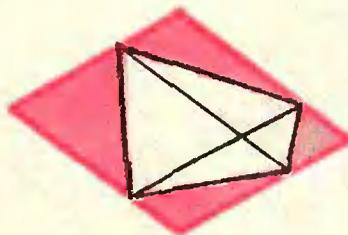


Рис. 2.

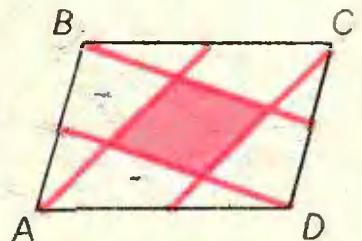


Рис. 3.

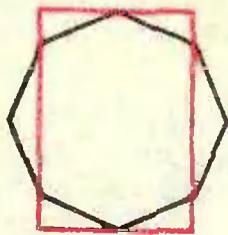


Рис. 4.

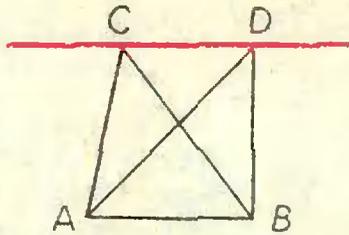


Рис. 5.

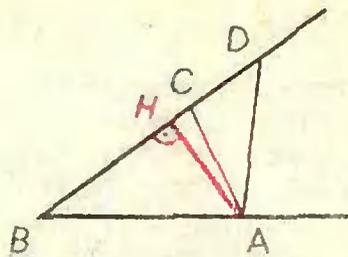


Рис. 6.

7. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

У к а з а н и е. Взгляните на рисунок 4.

8. Докажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения радиуса этой окружности на периметр многоугольника.

В этих задачах можно обойтись приемом «разрезания и складывания». Заметим, что в принципе этим приемом можно пользоваться всегда, когда нужно доказать равенство площадей двух многоугольников; верна такая

Теорема: если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых составляется другой многоугольник.

Эта теорема доказывается не сложно*). Но практически, чтобы установить равенство площадей или найти отношение площадей, вовсе не обязательно «разрезать и складывать». Например, очень часто бывает удобно сравнить площади двух треугольников, пользуясь формулой, которую мы назвали А4. Из нее сразу следуют, в частности, такие соотношения для площадей:

если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной его основанию, то площадь при этом не меняется (рис. 5; треугольники ABC

и ADB имеют общее основание AB и равные высоты);

если одну из сторон треугольника, прилежащих к данному его углу, увеличить в k раз, то его площадь также увеличится в k раз (см. рис. 6; треугольники ABC и ABD имеют общую высоту AH, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований):

$$S_{\triangle ABC}/S_{\triangle ABD} = BC/BD.)$$

Отсюда следует более общее соотношение:

если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол

(см. рис. 7; $S_{\triangle ABC}/S_{\triangle ABD} = BC/BD$, $S_{\triangle ABD}/S_{\triangle EBD} = AB/EB$, поэтому $S_{\triangle ABC}/S_{\triangle EBD} = (AB \cdot BC)/(EB \cdot BD)$).

В частности, если два треугольника подобны и стороны одного в k раз больше соответственных сторон другого, то площадь первого в k^2 раз больше площади другого.

В следующих задачах решение основано как раз на этих соображениях: на сравнении площадей треуголь-

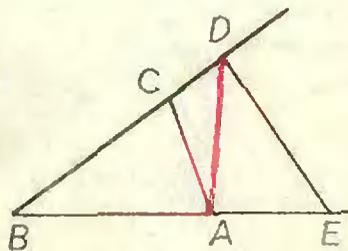


Рис. 7.

*) См. книжку В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносторонние фигуры», серия «Популярные лекции по математике», вып. 22, Гостехиздат, М., 1956.

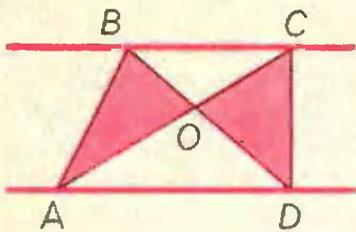


Рис. 8.

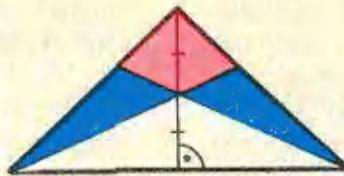


Рис. 9.

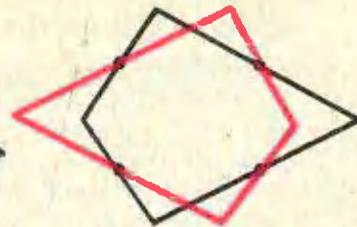


Рис. 10.

ников, у которых или одинаковые основания, или одинаковые высоты, или одинаковые углы. Постарайтесь найти самый простой и красивый путь решения!

9. O — точка пересечения отрезков AC и BD (рис. 8). Для того чтобы площади треугольников AOB и DOC были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны. Докажите!

Чтобы решить эту задачу, нужно доказать два утверждения: (1) если площади треугольников AOB и DOC равны, то прямые BC и AD параллельны; (2) если прямые BC и AD параллельны, то площади треугольников AOB и DOC равны.

10. Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждая из его диагоналей делит его площадь пополам.

И здесь, как в предыдущей задаче, нужно доказать две теоремы: прямую и обратную.

11. В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении $1 : 2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K . Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC .

Указание. Проведите через точку M прямую, параллельную AK , и найдите с ее помощью отношение отрезков BK и BC .

12. На продолжении стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ найдите такую точку O , чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ равнялась площади треугольника ABO .

Указание. Проведите через точку D прямую, параллельную диагонали AC .

Всегда ли задача 12 имеет решение? Всегда ли оно единственно?

Эта задача позволяет превратить любой выпуклый многоугольник в равноваликий с меньшим числом сторон.

13. Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие ее с вершинами основания (рис. 9). Какую часть площади треугольника составляет каждая из частей, на которые эти две прямые разрезают треугольник?

14. Дан треугольник ABC . Продолжим его сторону AB за вершину B отрезком $BP=AB$, сторону AC — за вершину A отрезком $AM=CA$, сторону BC — за вершину C отрезком $KC=BC$. Во сколько раз площадь треугольника PKM больше площади треугольника ABC ?

Указание. Соедините точки M и B , P и C , A и K .

15. Сформулируйте аналогичную задачу для четырехугольника и решите ее. Выведите из нее результат задачи 6.

16. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки M , P , K , H так, что $AM : MB = 3 : 5$; $BP : PC = 1 : 3$; $CK : KD = 4 : 5$; $DH : HA = 1 : 8$. Найдите отношение площади шестиугольника $MВРКDH$ к площади четырехугольника $ABCD$. Подумайте, при любых ли отношениях AM к MB , BP к PC и так далее можно решить эту задачу?

Указание. Проведите диагональ и воспользуйтесь A_3 .

17. В выпуклом четырехугольнике соединены середины соседних сто-

рон. Какой четырехугольник образуют проведенные отрезки? Найдите отношение площади этого четырехугольника к площади исходного.

Указание. Проведите диагонали данного четырехугольника и воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.

18. Докажите, что если два выпуклых четырехугольника расположены так, что середины их сторон совпадают (рис. 10), то их площади равны.

19. Прямая, параллельная диагонали AC четырехугольника $ABCD$ и проходящая через середину его диагонали BD , пересекает сторону AD в точке E . Докажите, что прямая CE делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

Указание. Проведите медианы в треугольниках BCE и BAE из вершин C и A соответственно.

20. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой его диагонали. Точка O пересечения этих прямых соединена отрезками с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что эти четыре отрезка делят площадь четырехугольника на четыре равные части.

Указание. Сделайте крупный чертеж. Обозначьте на нем середины сторон AB , BC , CD и DA соответственно через M , T , P , K , а середину диагонали AC через H . Чтобы доказать, что площадь одного из четырех полученных кусков (например, $МОКА$) равна $1/4$ площади всего четырехугольника, заметьте, что четырехугольники $МОКА$ и $МНКА$ равновелики.

21*. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три

равные части (рис. 11). Докажите, что между этими прямыми заключена $1/3$ площади четырехугольника.

22*. Пусть K и L — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки DK и AL пересекаются в точке P , а отрезки CK и BL — в точке Q . Тогда сумма площадей треугольников APD и BQC равна площади четырехугольника $PKQL$ (рис. 12).

До сих пор мы имели дело с задачами, в которых требовалось доказать равенство площадей или найти отношение площадей. Теперь — несколько задач, при решении которых удобно пользоваться неравенствами между площадями.

23. Внутри треугольника ABC лежит точка M . Докажите, что площади треугольников ABM и CBM равны тогда и только тогда, когда точка M находится на медиане BK (рис. 13).

Решение. Если точка M находится на медиане, то $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$, $S_{\triangle AMK} = S_{\triangle CMK}$ и потому $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$. В одну сторону утверждение задачи доказано. Осталось доказать обратное: если $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$, то точка M лежит на медиане BK . Предположим, что M не лежит на BK . Тогда один из отрезков MA или MC пересекает BK . Пусть это будет MC (если медиану пересекает MA , то рассуждение аналогично), и N — точка пересечения MC и BK . Тогда $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle ABN}$, поскольку треугольник ABM лежит внутри треугольника ABN , и $S_{\triangle CBM} > S_{\triangle CBN}$, поскольку треугольник CBM лежит внутри тре-

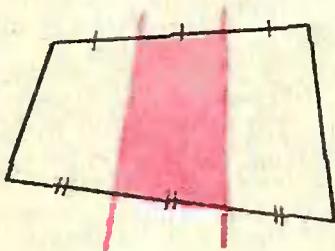


Рис. 11.

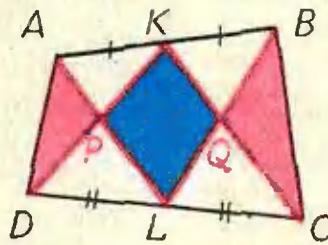


Рис. 12.

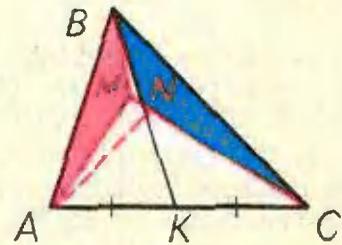


Рис. 13.

угольника S_{CBM} . Но $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle CBN}$, — ведь точка N лежит на медиане. Следовательно, $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle CBM}$. А мы предположили, что $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$. Получили противоречие. Задача полностью решена.

Подумайте, как с ее помощью решить следующую задачу, переключающуюся с задачей 20.

24.* Докажите, что если внутри четырехугольника $ABCD$ существует такая точка O что отрезки OA , OB , OC , OD делят его на четыре

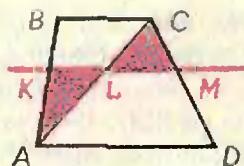


Рис. 14.

равновеликие части, то хотя бы одна из его диагоналей делит другую диагональ пополам. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

25. На сторонах угла A взяты точки B и C . Через середину K отрезка BC проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках D и E . Докажите, что площадь треугольника ADE больше площади треугольника ABC .

Решение этой задачи позволяет через данную точку внутри данного угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей возможной площади. Подумайте, как это сделать.

26. В данной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведена диагональ AC (рис. 14). На какой высоте нужно пересечь трапецию прямой, параллельной основаниям, чтобы сумма площадей треугольников AKL и LMC была наименьшей (K , L и M — точки пересечения прямой с отрезками AB , AC и CD соответственно)?

27*. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Докажите, что площадь треугольника ACE составляет не менее половины площади шестиугольника.

СИМПОЗИУМЫ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Идея слета учащихся специализированных физико-математических школ разных городов зародилась в школе № 40 г. Горького. В марте 1971 года в дни весенних школьных каникул по приглашению этой школы в Горький съехались представители математических школ Москвы, Риги, Ростова, Волгограда, Кишинева, Алма-Аты, Тбилиси, Костромы, Ленинграда и Киева.

На симпозиуме работали несколько секций, на каждой из которых школьники делали доклады. Работой секций руководили ученые Горьковского государственного университета.

Секцией математики руководил кандидат физико-математических наук доцент Д. А. Гудков. На этой секции были заслушаны доклады «Нестандартные суммы», «Моделирование рефлексов», «Математика и лингвистика», «Вычисление площади тени», «Самовоспроизводящиеся числа» и другие.

Доклады делали: Я. Шнейдерман (10 кл. с. ш. 40, Горький), А. Кнафель (8 кл. с. ш. 40, Горький), Н. Потанкина (10 кл. с. ш. 40, Горький), О. Малиновский (9 кл. с. ш. 13, Рига), А. Борисенко (10 кл. с. ш. 145, Киев), И. Раухвагер (10 кл. с. ш. 34, Кишинев), М. Вишик (10 кл. с. ш. 444, Москва), В. Каплинский (8 кл. с. ш. 444, Москва) и другие.

Секцию физики возглавил кандидат физико-математических наук доцент М. С. Ковалер. На этой секции были заслушаны доклады «Мирный атом — на службу водообеспечения человечества», «Об аналогиях в физике», «О методе «мирной массы» и его применении в решении физических задач», «Получение и исследование тонких кристаллических пленок», «Свин-генератор и осциллограф» и другие.

Доклады делали: А. Мирухолова (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси), А. Езерский (10 кл. с. ш. 40, Горький), Ю. Хандрус (10 кл. с. ш. 145, Киев), И. Молан (10 кл. с. ш. 34, Кишинев), Н. Чайка (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси), М. Герштейн (10 кл. с. ш. 40, Горький), М. Гомаюнов (10 кл. с. ш. 239, Ленинград) и другие.

Работали также секции астрономии, химии и краеведения.

Во время работы симпозиума учащиеся не только читали и обсуждали доклады. Они успели также познакомиться с работой школы № 40, с достопримечательностями города, побывали в музеях, встречались с учеными.

(Продолжение см. на стр. 53)

Задачи

Решения задач из «Задачника Кванта» можно присылать не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала. На конверте после адреса журнала укажите, решения каких задач вы посылаете (например, «Задачник Кванта» М126, Ф128). В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, шестизначный индекс и адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь). Решение каждой задачи должно быть написано на отдельном листе (листах); в конце каждого решения укажите свою фамилию. Звездочкой помечены задачи повышенной трудности.

М126. Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r , каким-то образом разрезан на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r .

И. Д. Новиков

М127. Для каждого натурального числа n обозначим через $s(n)$ сумму его цифр (в десятичной записи). Назовем натуральное число m *особым*, если его нельзя представить в виде $m = n + s(n)$, где n — какое-то натуральное число. (Например, число 117 не особое, поскольку $117 = 108 + s(108) = 108 + 9$, а число 121, как нетрудно убедиться, — особое.) Верно ли, что особых чисел существует лишь конечное число?

М128. Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

М129. а) В ведро налили 12 л молока. Как, пользуясь лишь сосудами в 5 и 7 л, разделить молоко на две равные части?

б) * Решите общую задачу: при каких a и b можно разделить пополам $(a+b)$ л молока, пользуясь лишь сосудами в a л, b л и $(a+b)$ л? *

В. В. Ушаков

М130. Какое наибольшее число точек можно разместить

а) на плоскости;

б) * в пространстве,

так, чтобы ни один из треугольников с вершинами в этих точках не был тупоугольным?

Г. А. Гальперин

Ф138. Космонавт массой 100 кг находится вне космического корабля, масса которого равна 5 т, на фале длиной 64 м. Найти натяжение фала, если корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры тяжести.

При расчете считать, что корабль движется по круговой орбите, высота которой h от поверхности Земли пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли ($R = 6400$ км).

* За одно переливание из одного сосуда в другой можно вылить все, что там есть, или долить второй сосуд до верха.

Ф139. Футболист ударил по мячу, сообщив ему скорость v под углом α к горизонту, и попал в ближний нижний угол ворот. Если бы футболист ударил по мячу в том же месте футбольного поля и мяч полетел бы под тем же углом к горизонту, но со скоростью, на 5% большей скорости v , то он попал бы в верхнюю штангу ворот. Найти скорость, с которой начинает двигаться мяч, если высота ворот $h=2$ м, а угол $\alpha=30^\circ$.

И. Ш. Слободецкий

Ф140. Будет ли давать правильные показания чашечный ртутный барометр, если часть его трубки (ниже уровня ртути в ней) сделана из очень мягкой резины?

Ф141. Из «черного ящика», содержащего неизвестную электрическую схему, выведены три провода. Два из

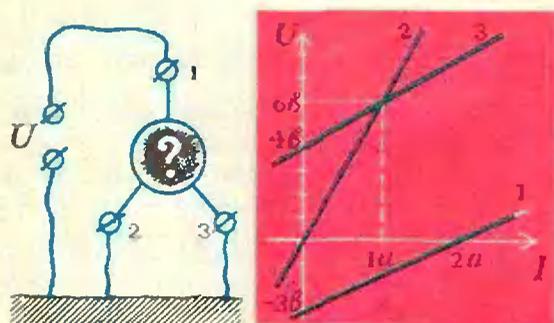


Рис. 1.

них соединяют с землей и затем снимают зависимость тока, идущего по третьему проводу, от разности потен-

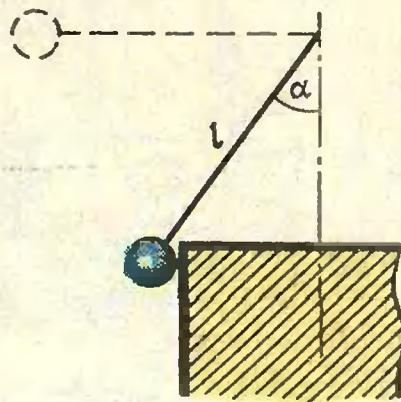


Рис. 2.

циалов между концом этого провода и землей. Соединяя разные пары выводов с землей, строят графики для трех возможных вариантов включения схемы. Эти графики показаны на рисунке 1. Ток считается положительным, если он идет к схеме, находящейся в ящике, и отрицательным в противоположном случае. Придумайте простейшие схемы содержимого «черного ящика» и определите их параметры.

Б. Б. Буховцев

Ф142. Стальной шарик, подвешенный на нитке длины l , отклонили так, что нить приняла горизонтальное положение, и отпустили. В тот момент, когда нить составляла угол $\alpha=30^\circ$ с вертикалью, шарик ударился о неподвижную стальную плиту (рис. 2). На какую высоту поднимется шарик после удара о плиту, если удар можно считать абсолютно упругим?

Г. Л. Коткин





Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М84—М88 (решению задачи М85 посвящена отдельная статья «Иррациональность суммы радикалов», стр. 26—27).

М84

Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую l . На этой прямой взяты точки B и C так, что $AB=AC$. Через точки B и C проведены соответственно две произвольные секущие, из которых одна пересекает окружность в точках P и Q , вторая — в точках M и N . Пусть прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S . Докажите, что $AR=AS$.

Большинство читателей, приславших нам письма, решили эту задачу с помощью вычислений, основанных на теореме синусов для треугольника (подобным образом в книге В. Б. Лидского и др. «Задачи по элементарной математике» решена задача 395, являющаяся «вырожденным» частным случаем М84, когда точки B и C совпадают с A). Остроумное геометрическое решение нашел С. Андросов из Архангельска.

Пусть P', Q', M' и R' — точки, симметричные точкам P, Q, M и R относительно диаметра KL окружности, проходящего через точку A, E и E' — точки пересечения прямой l и окружности. Мы должны доказать, что точки R' и S совпадают. Мы покажем, что и точка R' , и точка S лежат на окружности, проходящей через точки C, N и P' . Такая окружность существует только одна (случай, когда какие-либо две из точек C, N и P' совпадают, очевиден), и она пересекает прямую l , кроме точки C , еще только

в одной точке, в которой должны лежать и R' , и S .

Точки C, N, P' и S лежат на одной окружности, поскольку (рис. 1)

$$2\angle CSN = \sphericalangle EN + \sphericalangle QE' = \sphericalangle Q'E + \sphericalangle EN = \sphericalangle Q'N = 2\angle CP'N,$$

а точки C, N, P' и R' лежат на одной окружности, поскольку

$$2\angle CR'P' = \sphericalangle EP' + \sphericalangle M'E' = \sphericalangle ME + \sphericalangle EP' = 360^\circ - \sphericalangle ME'P' = 360^\circ - 2\angle CNP'.$$

(Еще легче проверить, что на одной окружности лежат точки C, N, P' и T , но мы предпочли не вводить лишнюю букву.)

В этом решении есть только один существенный недостаток: оно явно опирается на рисунок 1 и не учитывает, что конфигурация, описываемая в задаче, может иметь совсем другой вид; точки на прямых могут быть расположены в другом порядке, некоторые из точек B, R и даже вся прямая l могут лежать вне окружности (рис. 2) и т. п. Как исправить этот недочет? Нужно либо перечислить каким-то образом все возможные случаи расположения точек, либо переделать решение так, чтобы оно подходило сразу для всех случаев. Покажем, как можно это сделать, используя не совсем обычное определение «угла между прямыми».

Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, пересекающиеся в точке O . Обозначим через $\rightarrow (l_1, l_2)$ угол, на который нужно повернуть вокруг точки O против часовой стрелки

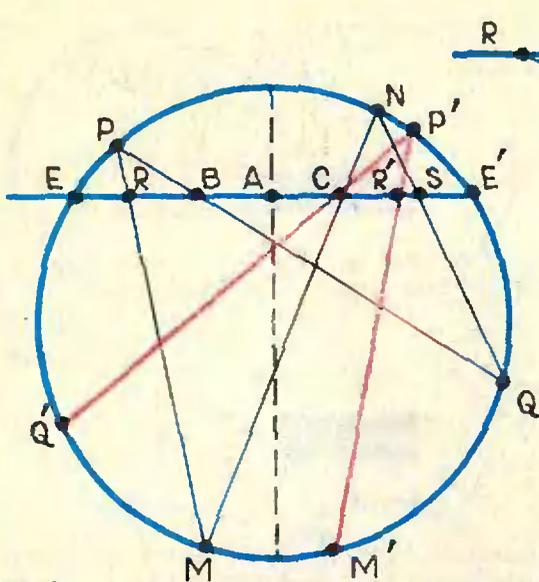


Рис. 1.

прямую l_1 , чтобы она совпала с l_2 ($0^\circ < \angle(l_1, l_2) < 180^\circ$). Если прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают, то, по определению, $\angle(l_1, l_2) = 0$. Проверьте, что для любых двух данных точек U и V и данного угла α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) множеством точек X , для которых $\angle(UX, VX) = \alpha$, будет окружность (строго говоря, за исключением самих точек U и V); другими словами, *четыре точки U, V, X_1 и X_2 лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(UX_1, VX_1) = \angle(UX_2, VX_2) \neq 0$* (рис. 3, а; сравнение рисунков 3, а и 3, б объясняет преимущества нового способа определения угла).

Вернемся к нашей задаче. Теперь утверждение, что пять точек C, N, P', S, R' лежат на одной окружности (откуда и сле-

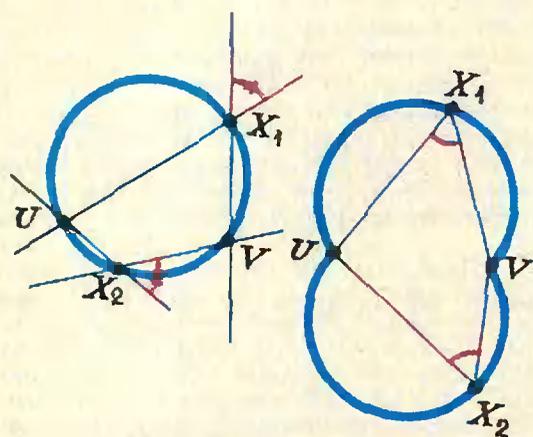


Рис. 3. Голубыми линиями показаны множества точек, для которых: а) $\angle(UX, VX) = \alpha$ (левый рисунок) и б) $\angle(UX, VX) = \alpha$ (правый рисунок).

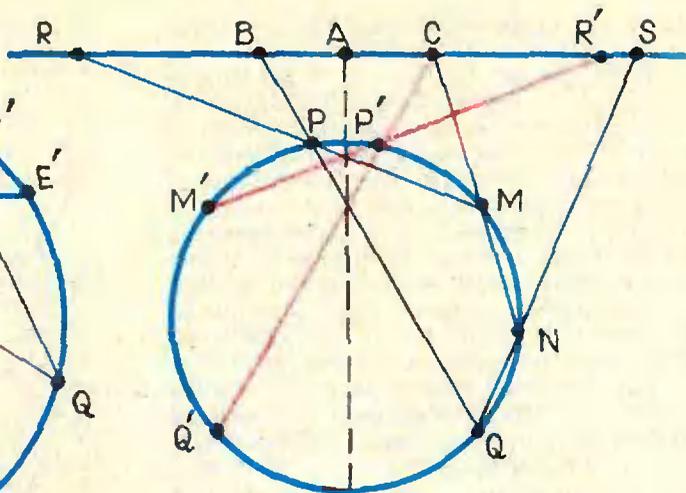


Рис. 2.

дует, что R' совпадает с S) вытекает из равенств

$$\begin{aligned} \Rightarrow (CS, NS) &= \Rightarrow (Q'Q, NQ) = \\ &= \Rightarrow (Q'P', NP') = \Rightarrow (CP', NP'); \\ \Rightarrow (CR', P'R') &= \Rightarrow (MM', P'M') = \\ &= \Rightarrow (MN, P'N) = \Rightarrow (CN, P'N). \end{aligned}$$

Эти равенства легко проверить формально, не обращая к чертежу — нужно только помнить, какие точки лежат на одной прямой и какие — на одной окружности; кроме теоремы, выделенной выше курсивом, используется, что $Q'Q \parallel MM' \parallel l$. (Конечно, нужно еще разобрать «вырожденные» случаи, когда какие-нибудь две точки, определяющие в этих равенствах прямую, совпадают; все они довольно очевидны и мы не бу-

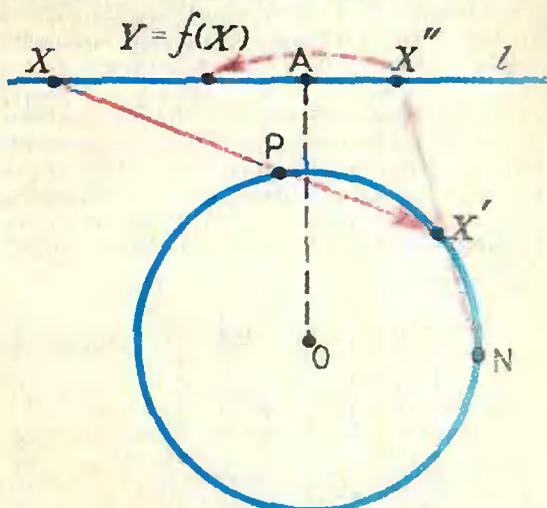


Рис. 4. Другая формулировка задачи №4: в результате трех отображений, показанных на рисунке, из точки X получается $Y = f(X)$; если проделать то же самое для точки Y , то получится, что $f(Y) = X$.

дем на них останавливаться.) Теперь задача полностью решена.

Приведем другую, более естественную формулировку этой задачи (подумайте, почему это та же самая задача!).

Пусть P и N — две различные точки окружности с центром O ; A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на данную прямую l , и f — отображение, которое каждой точке X прямой l ставит в соответствие точку $f(X)$ этой же прямой по следующему правилу: если X' — точка пересечения прямой PX с окружностью, X'' — точка пересечения прямой NX' с l , то $f(X)$ — точка, симметричная X'' относительно A . Тогда отображение f совпадает с обратным к нему, то есть $f(f(X))=X$ для всех X (рис. 4).

Тем, кто знаком с основными понятиями проективной геометрии, мы предлагаем попробовать найти простое «проективное» доказательство этой теоремы (заметим, что даже в ее формулировке нужно считать l расширенной прямой, то есть добавить к l бесконечно удаленную точку — тогда отображения, о которых идет речь, будут взаимно однозначны). Для частного случая решение приводится в книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования» (ГИТТЛ, 1956 г.; ч. II, задача 177), но оно проходит лишь в том случае, когда прямая l пересекает окружность, и использует формулу «двойных отношений». План другого решения, «без вычислений», приводится на стр. 71 этого номера журнала.

Н. Б. Васильев

M86

Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размера 2×2 и 1×4 . Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку 2×2 . Вместо нее удалось достать плитку 1×4 . Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

Расчертим дно коробки на квадратик размера 1×1 и отметим те квадратик, которые стоят на нечетных местах в нечетных рядах (см. рис. 5). Заметим, что каждая плитка 1×4 , закрывающая четыре квадратика на дне коробки, будет

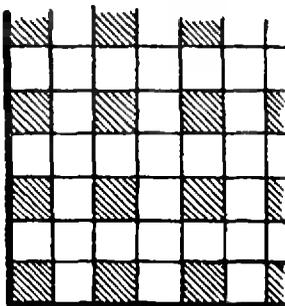


Рис. 5



Рис. 6.



Рис. 7.

закрывать обязательно четное число отмеченных нами квадратиков (два или ни одного), а плитка 2×2 всегда закрывает ровно один отмеченный квадратик. Таким образом, если плитки целиком закрывают дно коробки, то количество плиток 2×2 имеет ту же четность, что и общее число отмеченных квадратиков на дне коробки. Поэтому, если количество плиток 2×2 изменилось на единицу (или вообще на нечетное число), то вновь заполнить коробку не удастся.

Подумайте, останется ли верным утверждение задачи, если вместо плиток 1×4 и 2×2 (рис 6) рассматривать плитки из трех квадратиков: прямоугольные 1×3 и «уголки» (рис. 7). Решение этой задачи вы найдете в конце журнала, на стр. 61, но не спешите туда заглядывать!

Правильные решения нашей задачи прислали *А. Григорян* и *Е. Карасик* из Баку, *Э. Туркевич* из Черновцов, *А. Черняк* из Минска и *А. Шамаев* из Москвы.

Л. Г. Лиманов

M87

Докажите, что если три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку, то три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности того же радиуса.

Пусть все три окружности радиуса r с центрами O_1, O_2 и O_3 пересекаются в точке A и, кроме того, попарно пересекаются в точках B_1 (O_2 и O_3), B_2 (O_3 и O_1) и B_3 (O_1 и O_2). Очевидно, что середины C_1, C_2, C_3 отрезков AB_1, AB_2, AB_3 является в то же время серединами отрезков O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 соответственно (рис. 8). Поэтому у каждого из треугольника $B_1B_2B_3$ и $O_1O_2O_3$ стороны соответственно вдвое больше сторон треугольника $C_1C_2C_3$ (и параллельным им). Следовательно, $\triangle B_1B_2B_3 \sim \triangle O_1O_2O_3$. Но ясно, что радиус описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ равен r (действительно,

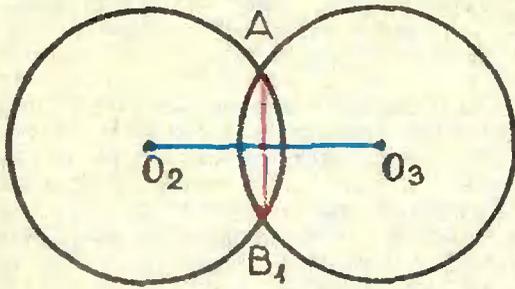


Рис. 8.

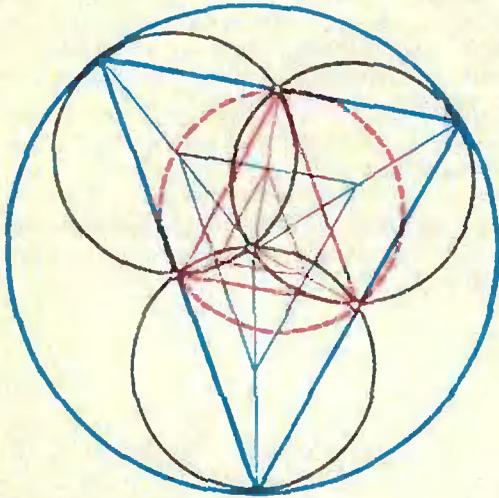


Рис. 9.

$AO_1 = AO_2 = AO_3 = r$, поэтому и радиус описанной окружности треугольника $B_1B_2B_3$ тоже равен r , что и требовалось доказать.

Многие читатели доказывали, что треугольники $B_1B_2B_3$ и $O_1O_2O_3$ равны, более сложным способом, при котором приходилось отдельно рассматривать различные случаи взаимного расположения этих треугольников (мы нарочно в нашем решении не ссылались на рисунок, где проведены все упоминаемые там отрезки, чтобы подчеркнуть, что оно не зависит от их расположения). Решение, совершенно аналогичное нашему, можно получить, рассматривая вместо треугольника

$C_1C_2C_3$ треугольник $D_1D_2D_3$, где D_1, D_2, D_3 — точки, диаметрально противоположные точке A в окружностях O_1, O_2 и O_3 соответственно; докажите, что B_1, B_2 и B_3 — середины сторон треугольника $D_1D_2D_3$. В конфигурации, которую мы получили (рис. 9), интересно еще то, что точка A является центром описанной окружности треугольников $O_1O_2O_3$ и $D_1D_2D_3$ и одновременно точкой пересечения высот треугольников $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$; последнее, впрочем, уже не используется в нашем решении.

Любопытно, что Д. Пойя (и у некоторых читателей, приславших нам письма) возникла совсем иная идея решения этой задачи. Отрывок из книги «Математическое открытие», в которой рассказывается о зарождении этой идеи, мы публикуем на стр. 67—69.

В. И. Березин

MS8

Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

Приведем сразу ответ. Искомое соотношение: $c = \frac{ab}{3} - \frac{2}{27}a^3$ (или, что то же самое, один из корней должен равняться $-\frac{a}{3}$). Действительно, пусть x_1, x_2 и x_3 — корни нашего уравнения. Тогда, по теореме Виета,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a.$$

С другой стороны, для того чтобы x_1, x_2, x_3 составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_1 + x_3 = 2x_2.$$

Поэтому $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$, откуда $x_2 = -\frac{a}{3}$.

Постарайтесь вывести условия, при которых корни уравнения четвертой степени образуют арифметическую прогрессию.

Л. И. Москвитине

В этом номере мы публикуем решения задач Ф92—Ф99

Ф92

Обруч массы m стоит на доске массы M (рис. 10). Коэффициент трения между доской и обручем k . Доска лежит на гладком столе. С каким ускорением будет двигаться доска, если обруч тянуть с силой F ?

Запишем уравнения движения обруча и доски (уравнения II закона Ньютона).

В горизонтальном направлении на обруч действуют две силы — сила F и сила трения $F_{\text{тр}}$ между доской и обручем (см. рис. 10). Центр тяжести тела — в данном случае центр обруча — движется так, как если бы к нему были приложены все силы, действующие на тело. Поэтому можно записать, что

$$ma_1 = F - F_{\text{тр}} \quad (1)$$

(a_1 — ускорение центра обруча).

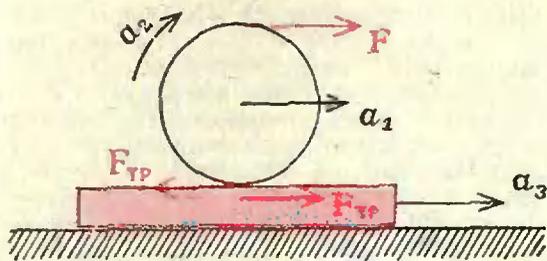


Рис. 10.

Обруч не только движется в горизонтальном направлении, но и вращается вокруг центра. Ускорение вращательного движения ему сообщают те же силы F и $F_{\text{тр}}$, но в этом случае они действуют «согласованно», раскручивая обруч в одну сторону. Ускорение вращательного движения обруча в системе координат, связанной с его центром *) обозначим a_2 . Тогда мы можем записать, что

$$ma_2 = F + F_{\text{тр}} \quad (**)$$

Теперь запишем уравнение движения доски. В горизонтальном направлении на нее действует только одна сила — сила трения обруча о доску. Поэтому, если ускорение доски обозначить a_3 , то

$$Ma_3 = F_{\text{тр}} \quad (***)$$

Итак, мы получили три уравнения, в которые входят четыре неизвестные величины: a_1 , a_2 , a_3 и $F_{\text{тр}}$. Чтобы найти эти неизвестные, нужно составить еще одно уравнение.

При движении обруча и доски возможны два случая: 1) обруч не проскальзывает относительно доски и 2) обруч проскальзывает относительно доски.

Рассмотрим первый случай: обруч не проскальзывает относительно доски. В этом случае скорость v_1 поступательного движения центра обруча, линейная скорость v_2

*) На самом деле система координат, связанная с центром обруча, не инерциальна. Но, рассматривая вращение обруча, это можно не учитывать, поскольку сила инерции приложена к центру тяжести обруча, и ее момент относительно центра обруча равен нулю.

**) Уравнение II закона Ньютона для вращающегося тела записывается следующим образом:

$$I\varepsilon = (F + F_{\text{тр}})r \quad (**)$$

где I — момент инерции, ε — угловое ускорение и r — радиус обруча (см. статью Л. К. Кикоина «Вращательное движение», «Квант» № 1, 1971).

Для обруча $I = mr^2$, $\varepsilon = \frac{a_2}{r}$. Если подставить эти значения в уравнение (**), то и получится уравнение (2).

вращения обруча вокруг его центра и скорость v_3 доски связаны соотношением

$$v_2 = v_1 - v_3.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим систему координат, связанную с центром обруча. В этой системе земля движется влево со скоростью v_1 (рис. 11). Так как доска движется относительно Земли вправо со скоростью v_3 , то скорость доски в системе координат, связанной с центром обруча, равна $v_1 - v_3$. С той же скоростью движется и нижняя точка обруча, касающаяся доски. Это и есть линейная скорость вращения обруча вокруг его центра.

Так как силы, действующие на обруч и доску, постоянны, то постоянны и ускорения a_1 , a_2 и a_3 . Пусть скорости v_1 , v_2 и v_3 тела приобретают через время t после начала их движения. Тогда $v_1 = a_1 t$, $v_2 = a_2 t$ и $v_3 = a_3 t$. Следовательно,

$$a_2 t = a_1 t - a_3 t.$$

Отсюда

$$a_2 = a_1 - a_3 \quad (4)$$

Мы получили уравнение, связывающее ускорения тел. Решая теперь совместно уравнения (1), (2), (3) и (4), находим

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{m}$$

и

$$a_3 = 0.$$

У нас получилось, что ускорение доски равно нулю. Из уравнения (3) ясно, что сила трения тоже равна нулю. Это связано с тем, что если к обручу, стоящему даже на абсолютно гладкой доске, приложить силу F так, как показано на рисунке 10, то ускорение поступательного движения обруча будет совпадать с ускорением его вращательного движения. При этом нижняя точка обруча катится по доске, не проскальзывая. Происходит это потому, что вся масса обруча сосредоточена в его тонком ободе и сила F сообщает обручу одинаковые ускорения поступательного и вращательного движения. Но это

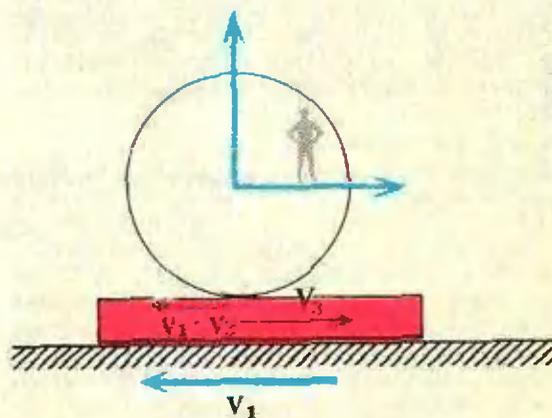


Рис. 11.

означает, что сила трения не зависит от силы F и всегда равна нулю. Поэтому обруч не может проскальзывать относительно доски (сила трения не может быть равна kN), и второй случай мы можем не рассматривать.

Ф93

В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n , проделано отверстие небольшого радиуса r . По оси отверстия из сосуда горизонтально направляют тонкий луч света. До какого уровня h над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч света вышел из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения?

Изменением поперечного сечения струи пренебречь, показатель преломления жидкости считать достаточно большим.

Под наибольшим углом к поверхности воды луч света падает в точке A струи (рис. 12). Угол падения α , при котором луч в этой точке не испытывает полного внутреннего отражения, должен быть таким, что

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Это следует из закона преломления света ($\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$) и условия, что угол $\beta = 90^\circ$. Касательная к струе в точке A составляет угол $\gamma = 90^\circ - \alpha$ с горизонталью. Таким образом, луч света выйдет из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения, если угол, который образует касательная к струе в точке A , составляет с горизонтом угол γ такой, что $\cos \gamma = \frac{1}{n}$.

Но касательная к поверхности жидкости — это касательная к траектории движения частиц, вышедших у верхнего края отверстия. Поэтому направление касатель-

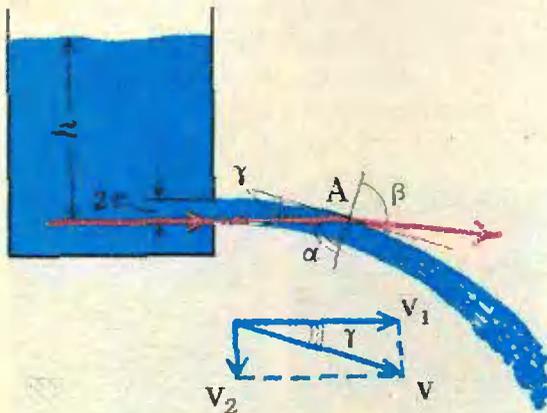


Рис. 12.

ной к поверхности жидкости совпадает с направлением вектора скорости частиц жидкости в точке A .

Эта скорость складывается из горизонтальной скорости v_1 , которую имели частицы воды у отверстия сосуда, и из скорости v_2 , приобретенной ими при свободном падении с высоты $2r$. Из закона сохранения энергии

следует, что $\Delta mg \cdot 2r = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$ (Δm — масса

частицы воды), поэтому $v_2 = \sqrt{4gr}$. Что же касается скорости v_1 вытекания жидкости из сосуда, то, как известно, она равна $\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием*).

Зная v_1 и v_2 , нетрудно найти угол наклона касательной к поверхности жидкости в точке A к горизонту:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{4gr}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{2 \frac{r}{h}}. \quad (2)$$

Выражая теперь $\cos \gamma$ через $\operatorname{tg} \gamma$ —

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}}$$

и учитывая, что $\cos \gamma = \frac{1}{n}$, получим

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{r}{h}}}$$

Отсюда

$$h = 2r/(n^2 - 1).$$

Ф94

Над одной грамм-молекулой идеального газа совершают цикл (замкнутый процесс), состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 13). Температуры газов в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3 соответственно. Определить работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

Расширяясь по изобаре 2—3, газ совершает работу

$$A_1 = P_2 (V_2 - V_1) = P_2 V_2 - P_2 V_1 = RT_3 - RT_2 = R (T_3 - T_2).$$

При сжатии газа по изобаре 4—1 работа

*) Это следует также из закона сохранения энергии. Действительно, при вытекании массы воды Δm из сосуда с жидкостью потенциальная энергия воды уменьшается на величину Δmgh (можно просто считать, что масса воды Δm переместилась с поверхности жидкости к отверстию).

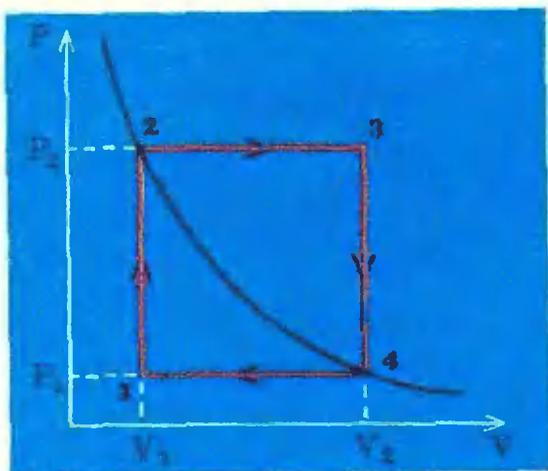


Рис. 13.

совершается уже над газом. Она равна

$$A_2 = P_1 (V_2 - V_1) = R (T_4 - T_1).$$

Полная работа, совершенная газом, очевидно, равна

$$A = A_1 - A_2 = (P_2 - P_1) (V_2 - V_1) = R (T_3 + T_1 - T_2 - T_4).$$

Так как точки 2 и 4 лежат на одной изомере, то температура газа в них одинакова. Обозначим ее $T = T_2 = T_4$. Тогда $A = R (T_3 + T_1 - 2T)$. Точки 3 и 4 лежат на одной изо-

хоре, поэтому $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_3}{T}$. Точки 2 и 1 тоже лежат на одной изохоре и $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T}{T_1}$. Из этих двух уравнений найдем, что

$$T = \sqrt{T_1 T_3}.$$

Следовательно,

$$A = R (T_1 + T_3 - 2 \sqrt{T_1 T_3}).$$

◆95

Поверхность реки образует наклонную плоскость. Может ли тело свободно плыть по реке со скоростью, превышающей скорость течения?

Если тело не перемещается относительно воды, то действующая на него со стороны воды сила трения равна нулю. Поэтому составляющая силы тяжести, параллельная поверхности воды (рис. 14), будет разгонять тело до тех пор, пока ее не уравновесит сила трения о воду (которая при малых скоростях пропорциональна скорости тела). При этом тело будет плыть со скоростью, большей скорости течения.

Теперь представим себе, что мы, оставив тонкую жесткую невесомую оболочку, убрали тело и налили в оболочку воду так, чтобы

ее объем был равен объему погруженной части тела (рис. 15). Поскольку тело плавало, масса налитой воды равна массе тела. Следовательно, оболочка с водой эквивалентна телу, которое мы убрали. Но вода, налитая в оболочку, ничем не отличается от воды в реке. Трение в жидкости связано только с вязкостью самой жидкости и не зависит от поверхности тела. Это объясняется тем, что к поверхности тела «прилипает» тонкий слой молекул воды и трение определяется взаимодействием между собой именно молекула воды. Значит, можно совсем убрать оболочку, сила трения от этого не изменится. Получается, что тело должно плыть со скоростью, равной скорости течения.

Что же происходит на самом деле?

Разберемся вначале с тем, что значит «скорость течения». Из-за трения скорость течения реки в различных точках реки различна. Она увеличивается от дна к поверхности и от берега к середине реки. Поэтому неодинакова и скорость течения в том месте, где находится плывущее по реке тело. Этим вода в оболочке отличается от окружающей воды, ведь скорость воды в оболочке во всех точках одинакова.

Предположим, что скорость тела равна скорости течения у края тела, который находится ближе к берегу. Тогда скорость течения воды, проходящей мимо тела в других точках, больше скорости тела. Из-за этого вода должна увлекать тело, увеличивая его скорость. С другой стороны, когда скорость тела возрастет, оно должно тормозиться благодаря тому, что скорость его точек, находящихся ближе к берегу, больше скорости течения и сила трения препятствует движению тела. В результате тело должно плыть со скоростью, большей минимальной, но меньшей максимальной из скоростей течения на протяжении тела.

◆96

Два одинаковых шарика связаны нитью. Найти высоту подъема этой системы, если один из шариков бросили вверх со скоростью v .

Импульс всей системы равен mv , а ее масса $2m$. Поэтому в начальный момент



Рис. 14.

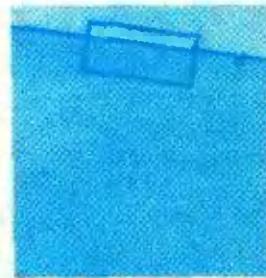


Рис. 15.

скорость центра масс системы равна $\frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$.

Запишем закон сохранения энергии для всей системы. При этом мы можем рассматривать движение не отдельных шариков, а центра масс системы, считая, что в нем сосредоточена вся масса системы. Если максимальная высота, на которую поднимается центр масс системы, равна h , то

$$2mgh = \frac{2m \left(\frac{v}{2}\right)^2}{2}$$

Отсюда

$$h = \frac{v^2}{8g}$$

Мы получили много решений этой задачи, однако в большинстве писем была одна и та же ошибка. Авторы решений полагали, что в тот момент, когда центр масс системы достигает максимальной высоты подъема, шарики неподвижны и их кинетическая энергия равна нулю. Это, однако, неверно. Шарики движутся и их кинетическая энергия в этот момент равна

$$\frac{mv^2}{2} - 2m \cdot gh = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{4} = \frac{mv^2}{4}$$

Ф97

Виток изолированного провода изогнут в виде восьмерки, кольца которой имеют радиусы $r_1 = 1 \text{ см}$ и $r_2 = 3 \text{ см}$. Виток находится в магнитном поле с индукцией $B = 10^4 \text{ гс}$, перпендикулярном плоскости витка. Изоляция провода рассчитана на напряжение 10 в. Произойдет ли пробой изоляции, если магнитное поле резко выключить? Время выключения поля $\Delta t = 10^{-9} \text{ сек}$.

Виток можно согнуть по-разному, при этом провода могут пересекаться, а могут и не пересекаться между собой. Мы рассмотрим оба случая.

Обозначим через E_1 и E_2 э. д. с. индукции, наводимые в контурах I и II (рис. 16), а через R_1 и R_2 — сопротивления этих контуров.

Если проволоки контура пересекаются (рис. 16, а), то обходя контур, нетрудно заметить, что э. д. с. E_1 и E_2 направлены в разные стороны. Поэтому ток, идущий по проволоке, равен

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

Разность потенциалов между точками A' и A'' , очевидно, равна разности E_1 и па-

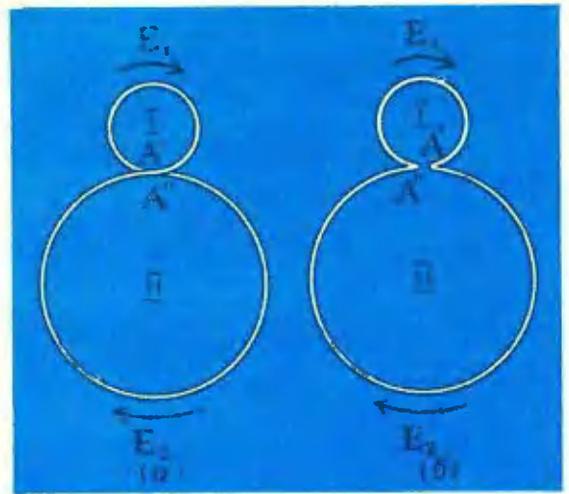


Рис. 16.

дения напряжения в контуре II (или же разности E_2 и падения напряжения в контуре I; в обоих случаях мы должны получить один и тот же результат)

$$U = E_1 - IR_1 = E_1 - \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} R_1 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Но

$$E_1 = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{S \Delta B}{\Delta t} = \pi r_1^2 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t};$$

аналогично,

$$E_2 = \pi r_2^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Сопротивления контуров равны

$$R_1 = \rho \cdot 2\pi r_1,$$

$$R_2 = \rho \cdot 2\pi r_2.$$

Отсюда получаем:

$$U = \pi r_1 r_2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (1)$$

Если проволоки контура не пересекаются (рис. 16, б), то э. д. с. E_1 и E_2 направлены в одну сторону. В этом случае

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$$

и

$$U = E_1 - IR_1 = \pi r_1 r_2 \frac{r_1 - r_2 \Delta B}{r_1 + r_2 \Delta t} \quad (2)$$

Во втором случае разность потенциалов между точками A' и A'' проволоки меньше, чем в первом, в $\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$ раз.

Подставляя в формулу (1) численные значения величин, найдем, что $U = 10 \text{ в}$. Вы-

численная по формуле (2) разность потенциалов еще меньше. Это означает, что изоляция не будет пробита.

Ф98

Какую максимальную разность потенциалов можно получить, имея в своем распоряжении источник с э. д. с. E и n одинаковых конденсаторов с емкостью C каждый?

Разберем вначале более простой случай с $n=2$.

Зарядив оба конденсатора от источника до разности потенциалов E и соединив вместе последовательно источник и оба конденсатора, можно получить разность потенциалов $3E$. Однако это не максимальная возможная разность потенциалов. Докажем, что имея два конденсатора и источник, можно получить разность потенциалов, сколько угодно близкую к $4E$.

Соединим последовательно источник с одним из конденсаторов, а второй конденсатор замкнем на эту пару: « $-$ » конденсатора соединим с « $-$ » источника, а « $+$ » конденсатора с « $+$ » второго конденсатора (рис. 17). При этом заряды на конденсаторах перераспределятся. Обозначая заряды на конденсаторах после перераспределения через q_1 и q_2 , а падение напряжения на конденсаторах через u_1 и u_2 , мы можем записать

$$E + u_1 = u_2. \quad (1)$$

Суммарный заряд правых пластин конденсатора равен $2CE$. Этот заряд перераспределяется между пластинами, но изменить ся не может. Поэтому

$$q_1 + q_2 = 2CE. \quad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$u_2 = \frac{3}{2} E.$$

Снова зарядим конденсатор 1 до разности потенциалов E , соберем ту же схему. Теперь u_2 станет равным $\frac{4}{7} E$.

Повторяя эту операцию много раз, можно зарядить конденсатор 2 до разности потенциалов, сколь угодно близкой к $2E$. Соединяя теперь источник и оба конденсатора последовательно, мы и получим раз-

ность потенциалов, сколь угодно близкую к $4E$.

Таким образом, ясно, что имея возможность с помощью двух конденсаторов получить батарею с э. д. с. $4E$, третий конденсатор можно зарядить уже до разности потенциалов $4E$, а затем, соединив последовательно конденсаторы и источник, получить разность потенциалов $8E$. До этой разности потенциалов можно зарядить четвертый конденсатор и т. д. Значит, имея n конденсаторов, один из них можно зарядить до разности потенциалов E , второй до разности потенциалов $2E$, третий до разности потенциалов $4E$ и так далее. n -й конденсатор можно зарядить до разности потенциалов $2^{n-1}E$. Соединив затем все конденсаторы и источник последовательно, можно получить разность потенциалов

$$E + (E + 2E + 4E + \dots + 2^{n-1}E) = 2^n E.$$

Ф99

На рисунке 18, а показаны $V-T$ диаграммы двух круговых процессов. При каком из них газ совершает большую работу: при процессе 1-2-3-1 или при процессе 1-3-4-1?

Перерисуем диаграммы процессов, показанных на рисунке, в координатах $P \rightarrow V$.

Точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, причем точке 1 соответствует меньший объем, чем точке 3. Поэтому, начертив изотерму, выберем две точки на ней — точки 1 и 3, как показано на рисунке 18, б. Теперь построить диаграммы циклов несложно. Линия 1-2 — это изобара, причем объем в точке 2 больше, чем объем в точке 1. Линия 2-3 — изохора. На диаграмме $P-V$ она должна быть вертикальна. Точно так же строится и диаграмма второго процесса.

Мы знаем, что работа, совершенная газом за цикл, равна площади фигуры, ограниченной графиком цикла. Но из рисунка видно, что площадь «красного» процесса больше площади «серого» процесса. Это означает, что большую работу газ совершает при процессе 1-2-3-1.

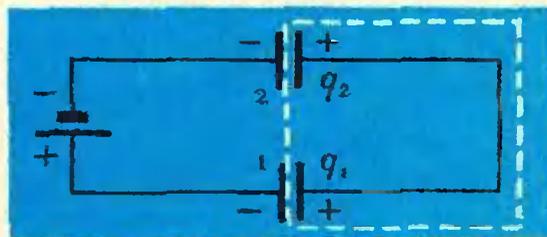


Рис. 17.

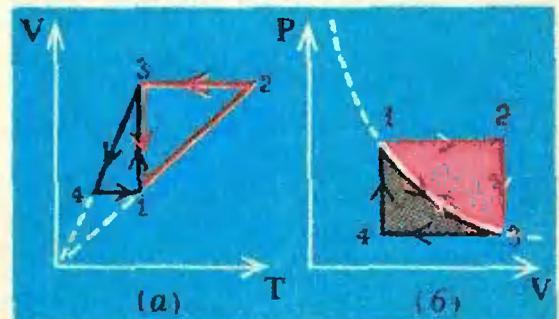


Рис. 18 (а, б).

Редакция получила 121 письмо с решениями задач Ф92—Ф99. Только один из читателей *А. Айрапетян* (Ереван) прислал правильное решение задачи Ф92. Наиболее легкими оказались задачи Ф94 и Ф99. Мы получили много писем с верными решениями этих задач.

Правильные решения задач прислали: *А. Айрапетян* (Ереван), Ф92; *С. Арасланова* (п. Нижне-Ивкино Куменского р-на Кировской обл.), Ф94, Ф95, Ф99; *В. Белов* (Вологда) Ф93, Ф94, Ф97, Ф99; *А. Белоцкий* (Москва) Ф94; *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.) Ф93; *В. Бронников* (п. Кильмезь Кировской обл.) Ф94; *Н. Вильданов* (Нижний Тагил) Ф94; *В. Гаврилов* (с. Снагость Курской обл.) Ф99; *С. Галахваридзе* (Тбилиси) Ф99; *В. Глембоцкий* (Ярославль) Ф93, Ф94, Ф97, Ф99; *С. Горбулин* (с. Красногвардейское Ставропольского края) Ф96; *Л. Дацевич* (Ленинград) Ф99; *Е. Долгов* (Москва) Ф93, Ф94, Ф95, Ф99; *Г. Дольдзе* (Тбилиси) Ф99; *В. Долматов* (Ташкент) Ф94, Ф99; *А. Домрачев* (Юшкар-Ола) Ф93; *Г. Зайцев* (Гагра) Ф93, Ф94, Ф97, Ф99; *М. Забежинская* (Ленинград) Ф94; *О. Заумылова* (Москва) Ф95; *Н. Зыков* (Саратов) Ф99; *А. Иванов* (Льгов Курской обл.) Ф99; *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.) Ф99; *Кацнельсон* (Магнитогорск) Ф94; *Л. Книжнерман* (Москва) Ф94, Ф96; *А. Кожухов* (Комсомольск-на-Амуре) Ф93; *В. Коломийцев* (Ростов-на-Дону) Ф99; *В. Коротких* (Новокузнецк) Ф94, Ф96; *В. Котиков* (Москва) Ф99; *В. Кулич* (д. Могильно Ивановского р-на Брестской обл.) Ф99; *В. Кууск* (Ржев) Ф94, Ф99; *Г. Левин* (Куйбышев) Ф94; *И. Лобов* (Красноярск) Ф93; *В. Лукашин* (Москва) Ф99; *А. Лукьянов* (Тамбов) Ф94, Ф99; *Ю. Лурье* (Грозный) Ф95, Ф99; *А. Мамула* (с. Дыбицы Богуславского р-на Киевской обл.) Ф99; *В. Надеждо* (Ленинград) Ф94, Ф99; *В. Недземский* (Ленинград) Ф94; *Я. Островский* (Курск) Ф97; *В. Пархоменко* (с. Покомибичи Гомельской обл.) Ф94; *М. Прегер* (Томск) Ф96; *В. Пшеничников* (с. Ключевка Новосергеевского р-на Оренбургской обл.) Ф96; *П. Сергеев* (Грозный) Ф99; *А. Семенов* (Фрунзе) Ф94; *И. Сидоров* (Москва) Ф94, Ф99; *Г. Симоненков* (Каунас) Ф94; *М. Соломонович* (Кишинев) Ф94; *Л. Сорокина* (Орел) Ф99; *А. Соунов* (Баку) Ф94; *Сычев* (Альга Актюбинской обл.) Ф99; *Г. Фай* (Караганда) Ф94; *В. Файтелевич* (Армавир) Ф99; *Н. Федин* (Омск) Ф94, Ф97, Ф99; *А. Федченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.) Ф94, Ф99; *Г. Фурманов* (Черновцы) Ф96; *Е. Чудаков* (Москва) Ф94; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) Ф99; *В. Шалимов* (Воронеж) Ф93.

(Начало см. на стр. 41)

Следующий симпозиум проходил в Тбилиси в школе № 42 с 5 по 9 ноября 1971 года. Приехали не только участники симпозиума в Горьком, но и пополнение из физико-математических школ Душанбе, Еревана, Баку и Минска.

Секцией математики-1 руководил заслуженный деятель наук доктор физико-математических наук профессор Д. А. Квеселава. На этой секции были заслушаны доклады «Об одной минимальной проблеме», «Сравнение логарифмов», «Числа Фибоначчи», «Алгоритмы», «Индукция в геометрии», «Номография», «Инверсия», «Элементарное введение в математическую логику», «Теорема Эйлера», «Математика в общественных науках» и другие.

Секцией математики-2 руководил доктор физико-математических наук профессор И. Н. Карцивадзе. Школьники прочли доклады на темы «М. В. Остроградский», «Нетривиальные точки пересечения графиков функций», «Признаки делимости», «Прямая и обратная теоремы», «Применение теоремы о выпуклости функций к доказательству неравенств», «Некоторые вопросы из теории рефлексивных игр», «Что такое расстояние», «Н. И. Мусхелишвили» и другие.

С докладами на математических секциях выступили: *М. Керзнер* (10 кл. с. ш. 239, Ленинград), *С. Борисенко* (9 кл. с. ш. 145, Киев), *И. Пирадзивили* (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси), *С. Березницкий*, *Л. Левантовский* (9 кл. с. ш. 444, Москва), *Л. Попова* (9 кл. с. ш. 10, Минск), *Р. Слизинова* (10 кл. с. ш. 110, Ташкент), *О. Худавердян* (10 кл. ф.-м. ш. при Ереванском государственном университете), *М. Гварамадзе* (10 кл., с. ш. 42, Тбилиси), *Л. Полканов* (9 кл. с. ш. 10, Минск) и другие.

Работу секции физики возглавлял кандидат физико-математических наук доцент А. Р. Хволес. Были заслушаны доклады «Поведение шара в потоке воздуха», «Законы сохранения и симметрия пространства — времени», «Падение дождевой капли в ненасыщающем воздухе», «Квазары», «Второе начало термодинамики» и другие.

На физической секции выступили: *А. Саввин* (10 кл. с. ш. 239, Ленинград), *Д. Туревская* (10 кл. с. ш. 145, Киев), *И. Акopian* и *О. Давыдов* (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси) и другие.

На симпозиуме работали также секции химии, истории и литературы.

Директор школы 444 г. Москвы,
В. Д. Головина

Методы расчета эквивалентных сопротивлений

А. Хацет



Любую цепь можно рассчитать, используя уравнения Кирхгофа. Однако они не входят в школьную программу и, кроме того, решать систему из большого числа уравнений со многими неизвестными — не лучший способ тратить время на экзамене. Поэтому нужно уметь пользоваться методами, позволяющими быстро найти сопротивление цепи. Об этих методах и рассказывается в статье ученика 10 класса 145 школы г. Киева, члена физического кружка Киевского дворца пионеров Александра Хацета.

1. Метод эквипотенциальных узлов

Идея метода состоит в том, чтобы различные узлы цепи, имеющие равные потенциалы, рассматривать как один узел. При этом потенциал в полученном «склеенном» узле равен общему значению потенциалов исходных узлов.

Если эквипотенциальные узлы соединить проводником (без сопротивления), то электрические условия во всех узлах и ветвях цепи не изменятся, так как по этому проводнику ток идти не будет.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. Найти сопротивление, эквивалентное участку цепи, изображенному на рисунке 1, а (все сопротивления на схеме одинаковы и равны r).

Решение. Нетрудно понять, что узлы 1, 2 и 3 имеют равные потенциалы. В самом деле, из соображений симметрии ясно, что токи, идущие по

ветвям А-1, А-2 и А-3 — одинаковы. Поэтому благодаря равенству сопротивлений этих ветвей падения потенциала на них тоже одинаковы и одинаковы потенциалы узлов 1, 2 и 3.

Аналогично можно показать, что узлы 4, 5 и 6 тоже имеют равные потенциалы (эквипотенциальны).

Ясно, что сопротивление цепи не изменится, если эквипотенциальные узлы 1, 2 и 3 соединить вместе. Не изменится сопротивление цепи, если соединить и вторую тройку эквипотенциальных узлов.

Сделав это, мы получим цепь, эквивалентную данной (рис. 1, б). Сопротивление этой цепи найти нетрудно: сопротивление участка AN равно $\frac{1}{3} r \left(\frac{1}{R_{AN}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$, сопротивление участка NM равно $\frac{1}{6} r$, а сопротивление участка MB равно $\frac{1}{3} r$. Поэтому $R_{AB} = \frac{5}{6} r$.

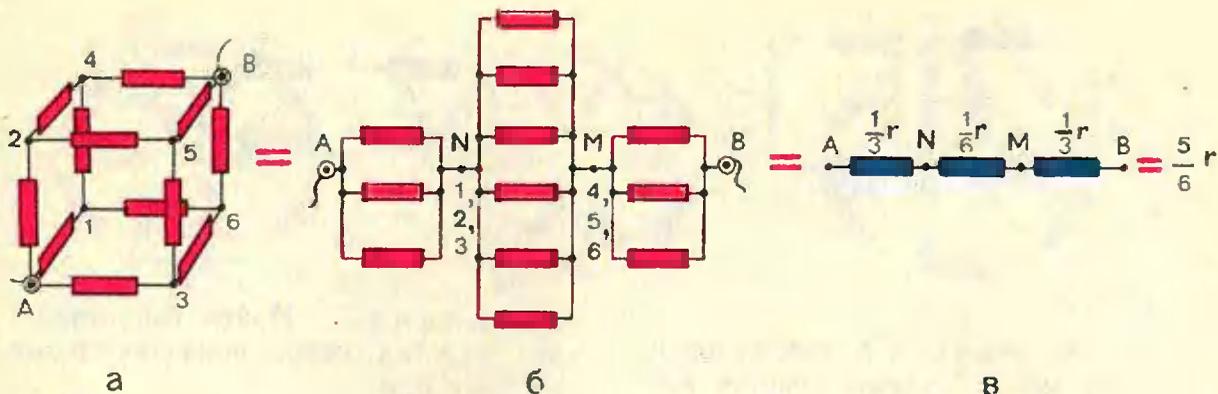


Рис. 1.

Как же найти эквипотенциальные узлы? Во многих случаях этому помогает «симметрия» включения участков цепи. «Симметрия» в том смысле, что те или иные участки цепи, те или иные узлы совершенно равноправны.

Решим еще одну задачу.

Задача 2. Найти сопротивление участка цепи, показанного на рисунке 2, а. (Все сопротивления на схеме одинаковы и равны r .)

Решение. Заметим, что узлы 1 и 2, а также узлы 3 и 4 образуют пары эквипотенциальных узлов; соединяя соответствующие эквипотенциальные узлы вместе, получим эквивалентную схему (рис. 2, б), сопротивление которой подсчитать нетрудно, пользуясь правилами нахождения сопротивления участков с параллельно и последовательно включенными сопротивлениями. Оно равно $\frac{7}{12} r$ (рис. 2, в, г, д).

2. Метод исключения участков цепи

Этот метод тесно связан с предыдущим. Если участок цепи включен

между двумя эквипотенциальными узлами, то этот участок можно из схемы исключить. При этом получится эквивалентная цепь, так как по исключенному участку ток не шел. Иногда после исключения участка эквипотенциальные узлы целесообразно соединить вместе. Рассмотрим примеры. Начнем с совсем простого.

Задача 3. Найти сопротивление участка цепи, показанного на рисунке 3, а.

Решение. Из соображений симметрии очевидно, что токи в ветвях AM и AN равны. Поэтому узлы M и N эквипотенциальны. Исключая участок MN , получаем эквивалентную цепь (рис. 3, б), сопротивление которой легко находится: $R = \frac{3}{2} r$.

Теперь решим более сложную задачу.

Задача 4. Найти сопротивление участка цепи AB , показанного на рисунке 4, а. Все сопротивления на схеме одинаковы и равны r .

Решение. Замечаем, что точки F и F' эквипотенциальны и, следова-

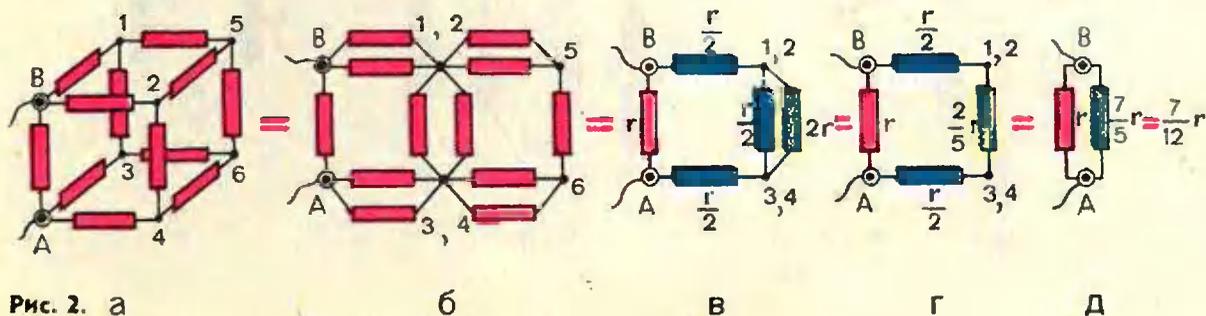


Рис. 2. а

б

в

г

д

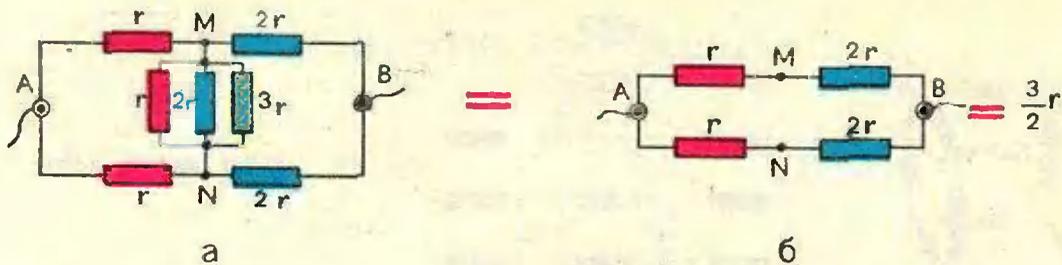


Рис. 3.

тельно, по участку FF' ток не идет. Поэтому можно удалить участок FF' и мы получим эквивалентную схему, изображенную на рисунке 4, б. После простых преобразований цепи (рис. 4, в) легко подсчитать, что ее сопротивление $R = \frac{7}{6} r$.

3. Метод «размножения» узлов

Этот метод тоже тесно связан с методом эквипотенциальных узлов. Если замена нескольких эквипотенциальных узлов одним (соединение узлов) приводила к эквивалентной цепи, то и обратная замена одного узла несколькими эквипотенциальными узлами не нарушит электрических условий в остальной части цепи.

Приведем примеры цепей, для которых такое преобразование целесообразно.

Задача 5. Найти сопротивление участка цепи, показанного на рисунке 5, а.

Заменим узел O тремя узлами; O_1 , O_2 и O_3 (рис. 5, б). Однако нам нужно еще доказать, что эти цепи эквивалентны. Для эквивалентности цепей необходимо, чтобы узлы O_1 , O_2 и O_3 были эквипотенциальны. Но это очевидно, так как разность потенциалов $\varphi_{O_2} - \varphi_A$ равна половине разности потенциалов точек A и B : $\varphi_{O_2} - \varphi_A = \frac{1}{2} u_{AB}$. Аналогично, из соображений симметрии включения сопротивлений нетрудно найти, что $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{1}{2} u_{AB}$ и $\varphi_{O_3} - \varphi_A = \frac{1}{2} u_{AB}$. Следовательно, $\varphi_{O_1} = \varphi_{O_2} = \varphi_{O_3}$, то есть узлы O_1 , O_2 и O_3 эквипотенциальны. Теперь найти сопротивление цепи не составляет труда. Оно равно $0,8 r$ (рис. 5, в).

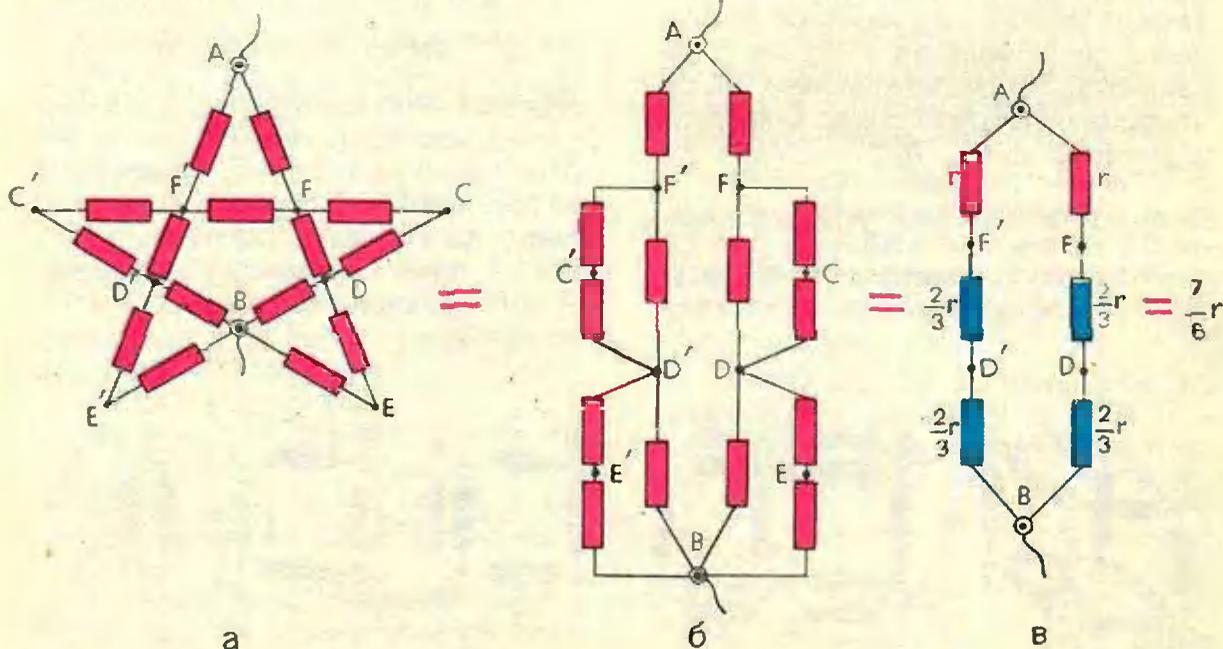


Рис. 4.

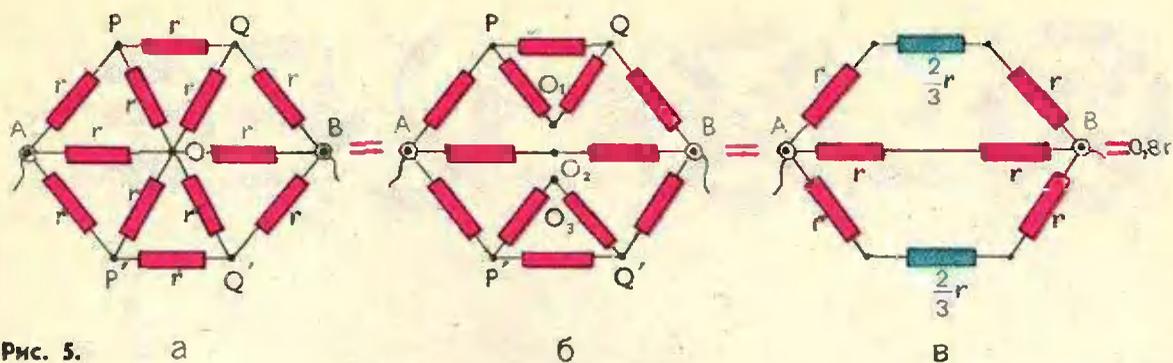


Рис. 5.

Задача 6. Определить сопротивление участка цепи AB , показанного на рисунке 6, а. Все сопротивления равны r .

Решение. Осуществим «раздвоение» узлов P и Q на попарно эквипотенциальные узлы P_1, P_2 и Q_1, Q_2 . Теперь наша цепь — это параллельное соединение двух одинаковых цепей, так что достаточно рассмотреть одну из них (рис. 6, б). Нетрудно заметить, что узел P_1 эквипотенциален с узлом P_1' , узлы Q_1 и Q_1' также эквипотенциальны. Поэтому их можно попарно соединить. Получим цепь, изображенную на рисунке 6, в. Ее сопротивление равно $\frac{11}{3}r$. Следовательно, сопротивление цепи, показанной на рисунке 6, а, равно $\frac{11}{6}r$.

тивление равно $\frac{11}{3}r$. Следовательно, сопротивление цепи, показанной на рисунке 6, а, равно $\frac{11}{6}r$.

4. Метод «расщепления» ветвей

Мы знаем, что несколько параллельных или последовательных ветвей можно заменить одной эквивалентной ветвью.

Приведенный ниже пример показывает, что иногда полезно применять эти правила в обратном направлении — не для «объединения» ветвей, а для их «расщепления».

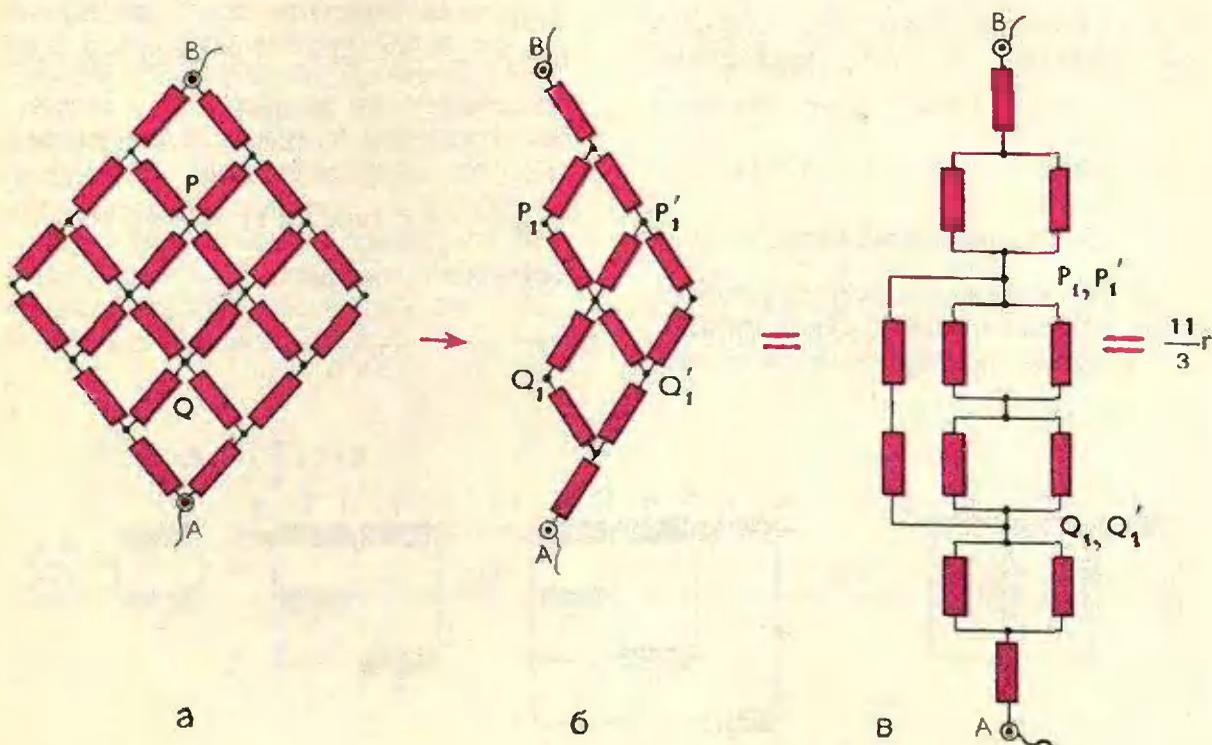


Рис. 6.

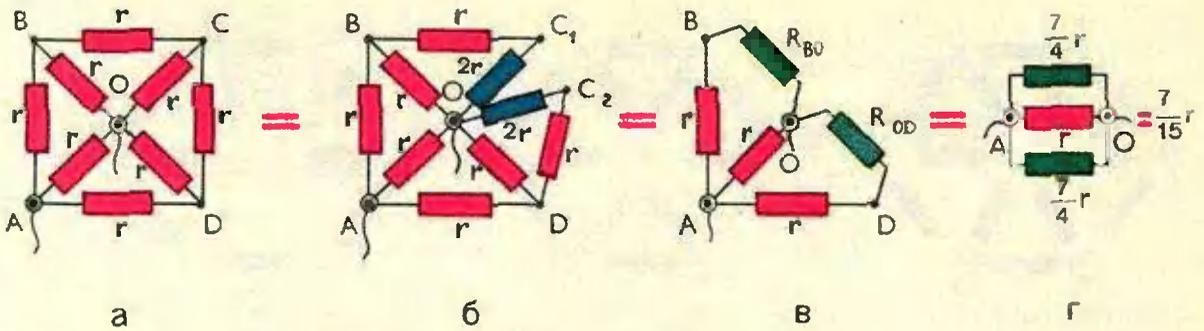


Рис. 7.

Задача 7. Найти сопротивление R цепи, показанной на рисунке 7, а.

Решение. Заменяем ветвь OC двумя параллельными ветвями с равными между собой сопротивлениями $2r$. Затем раздвоим узел C на эквипотенциальные узлы C_1 и C_2 (их эквипотенциальность следует из соображений симметрии относительно узлов A и O). Цепь, показанная на рисунке 7, б, эквивалентна цепи на рисунке 7, а. Найдем ее сопротивление. Участки BO и BC_1O соединены параллельно.

Поэтому сопротивление $R_{BO} = \frac{3}{4}r$.

Аналогично, $R_{OD} = \frac{3}{4}r$. Теперь узлы A и O связаны тремя параллельными ветвями с сопротивлениями $\frac{7}{4}r$, r , $\frac{7}{4}r$. Общее сопротивление цепи равно $R = \frac{7}{15}r$ (рис. 7, г).

5. Рекуррентный метод

Рекуррентными методами решения задач называют обычно такие методы, при которых задача решается по ша-

гам, причем на n -м шаге надо использовать результаты, полученные на предшествующих шагах. Рекуррентные методы в задачах расчета сопротивлений цепей особенно удобны, когда схема имеет повторяющуюся структуру и число сопротивлений велико.

Разберем простой пример.

Задача 8. Найти сопротивление цепи, показанной на рисунке 8, а, где $r_1 = \frac{r}{2}$, $r_2 = \frac{r}{2}$, $r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = r$.

Решение. Перерисуем цепь так, как показано на рисунке 8, б. Ясно, что расчет нужно вести с конца B . Заменяя сопротивление r_3 , r_6 и r_2 эквивалентным сопротивлением $R = r_2 + \frac{r_3 r_6}{r_3 + r_6} = r$, получаем схему, показанную на рисунке 8, в. Теперь сопротивления R , r_5 и r_1 , можно вновь заменить эквивалентным $R_1 = r_1 + \frac{R r_5}{R + r_5} = r$ (рис. 8, г). Общее сопротивление цепи равно

$$\frac{R_1 r_4}{R_1 + r_4} = \frac{r}{2}.$$

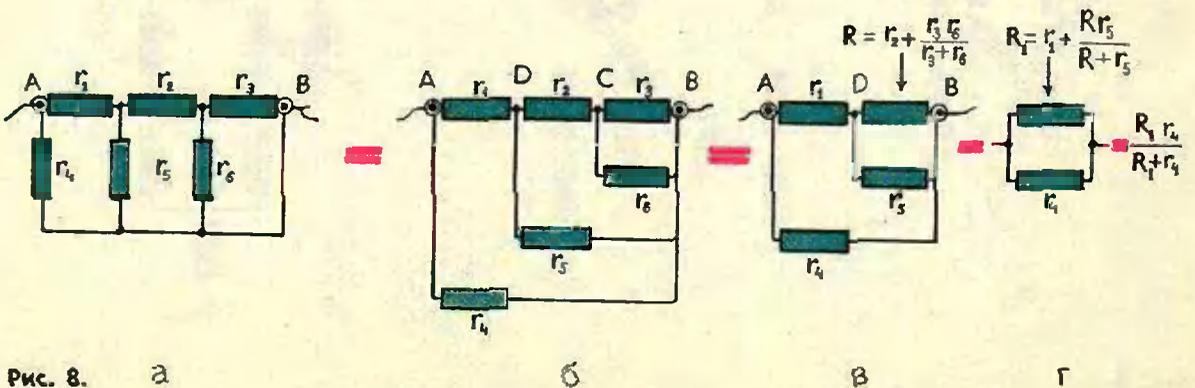


Рис. 8. а

б

в

г

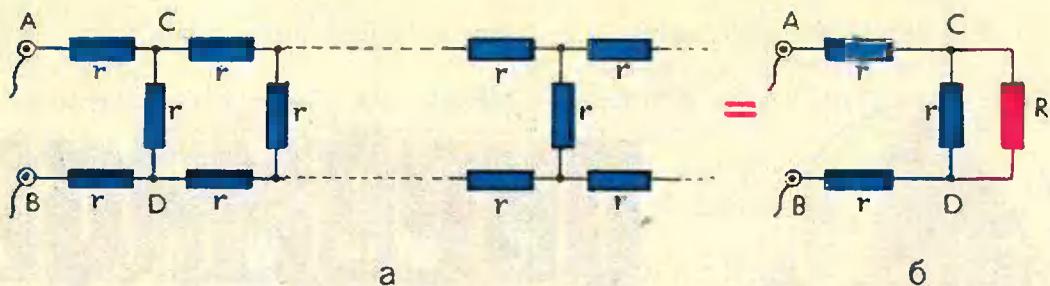


Рис. 9.

6. Метод Иона Тихого

Н. Я. Виленкин в книге «Рассказы о множествах» поведал о воображаемом 1001-м звездном путешествии Иона Тихого, известного героя произведений замечательного польского писателя Станислава Лема.

В этом путешествии Ион встречался с такой проблемой: нужно поселить еще одного путешественника в гостинице, все номера которой заняты. Особенность задачи состоит в том, что в гостинице бесконечное число номеров. Ион решает задачу так: каждому обитателю гостиницы дается приказ — перейти в комнату с номером, на единицу большим, чем номер его комнаты. При этом все прежние обитатели обеспечены жильем (ведь последнего-то номера нет в бесконечном ряду!), а комната № 1 освобождается для нового путешественника.

Этот способ можно применить, решая задачи на расчет цепей с бесконечным числом элементов. Заметим, что хотя в конкретных физических це-

пях число элементов всегда конечно, оно может быть столь велико, что его приближение можно считать бесконечным.

Для иллюстрации рассмотрим такую задачу.

Задача 9. Найти сопротивление R участка цепи, содержащего бесконечное число сопротивлений (рис. 9, а), каждое из которых равно r .

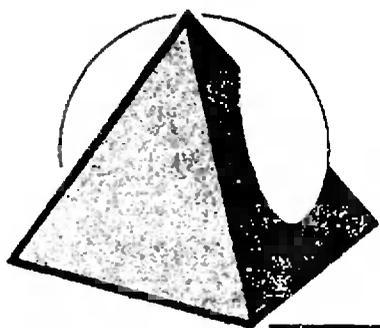
Решение. Если мы, воспользовавшись идеей Иона Тихого, отделим первое звено из трех сопротивлений $ACDB$, то цепь и ее сопротивление не изменятся. Поэтому схема, изображенная на рисунке 9, а, эквивалентна представленной на рисунке 9, б. Теперь без труда находим

$$R_{AB} = 2r + \frac{Rr}{R+r} = R,$$

откуда $R = r(1 + \sqrt{3})$.

Аналогично решаются и другие задачи для цепей с бесконечным числом сопротивлений.





ПИРАМИДА И СФЕРА

Ю. В. СИДОРОВ

На приемных экзаменах в институтах часто встречаются задачи, в которых речь идет о некотором расположении сферы (или нескольких сфер) относительно пирамиды. Решения таких задач основаны, по существу, на следующих трех фактах:

1) если плоскость (или прямая) касается сферы, то расстояние от центра сферы до этой плоскости (или прямой) равно радиусу сферы;

2) если сфера касается двух пересекающихся плоскостей, то центр сферы лежит в биссекторной плоскости двугранного угла, образованного этими плоскостями;

3) если пирамида описана вокруг сферы, то

$$V = \frac{1}{3} rS, \quad (1)$$

где r — радиус сферы, V и S — объем и полная поверхность пирамиды.

Эти факты известны каждому абитуриенту из школьного курса математики. Но в математике мало просто знать формулировки теорем — важно понимать эти теоремы и уметь применять их для решения задач.

Как правило, задачи, предлагаемые на вступительных экзаменах, формулируются просто, и большинство абитуриентов достаточно быстро находят какой-нибудь путь к решению. Но часто выбранный способ оказывается очень сложным и громоздким, требует длинных выкладок. Таким

«формально-вычислительным» методом иногда очень трудно получить окончательный результат. Для каждой задачи нужно постараться найти как можно более короткое и «изящное» решение.

Иногда и на устном экзамене абитуриенту предлагают не решить задачу, а лишь указать путь решения, проверяя тем самым, насколько абитуриент ориентируется в данном разделе теории.

В этой статье мы и рассмотрим задачи, в которых использование несложных геометрических соображений помогает найти простое и красивое решение.

Задача 1 (МФТИ, 1966). *Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равные сферы так, что каждая сфера касается трех других сфер и трех граней тетраэдра. Найдите радиус этих сфер.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, O — центр вписанной в него сферы, r — радиус этой сферы; M, N, K, L — центры данных сфер, их радиус мы обозначим через x .

Тетраэдр $MNKL$ — правильный, так как каждое его ребро равно $2x$. Грани тетраэдра $MNKL$ параллельны граням тетраэдра $ABCD$ (докажите!), а точка O удалена от каждой грани тетраэдра $MNKL$ на расстояние $r - x$. Следовательно, точка O является центром сферы, вписанной в тетраэдр

$MNKL$, и радиус этой сферы равен $r-x$.

Используя выражения для объема и полной поверхности правильного тетраэдра через его ребро, по формуле (1) находим

$$r = \frac{a}{2\sqrt{6}}, \quad r-x = \frac{x}{\sqrt{6}},$$

$$x = \frac{r\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}} = \frac{a}{2(1+\sqrt{6})}.$$

Задача 2 (МФТИ, 1965). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A , и касающейся плоскости, проведенной через середины ребер AB , AD и BC .

Решение. Заметим, что искомый радиус r равен радиусу любой сферы, касающейся граней ABC , ACD и данной секущей плоскости (рис. 1), потому что $DH = HC$, $AC \parallel EF \parallel GH$, и надо лишь вписать сферу в призму, а затем пододвинуть ее к плоскости ABD . Расположим центр одной из таких сфер в плоскости, проходящей через ребро BD и перпендикулярной к ребру AC . Радиус этой сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник MNK , у которого

$$KN = \frac{a}{2}, \quad MN = KM = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

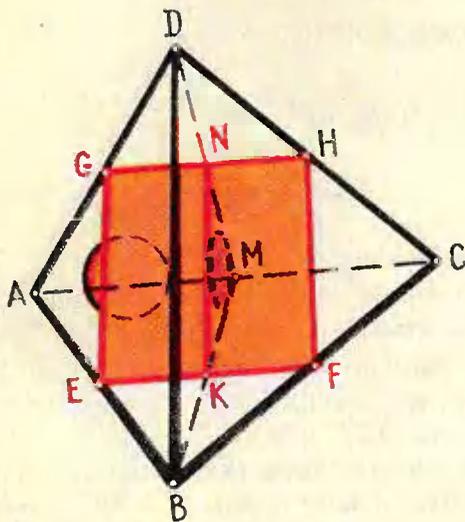


Рис. 1.

Используя выражение для радиуса вписанной в треугольник окружности через его площадь и полупериметр, находим

$$r = \frac{2S_{\triangle MNK}}{KN + 2MN} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}.$$

Задача 3 (МФТИ, 1963). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро пирамиды равно b . Найти радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Решение. Пусть SK — высота данной пирамиды (рис. 2), O — центр сферы, $OM \perp BS$, $OM = OD = r$.

Заметим, что $BM = BD = \frac{a}{2}$, как две касательные к сфере, проведенные из точки B . Из подобия треугольников SOM и SBK находим

$$r = \frac{SM \cdot BK}{SK} = \frac{\left(b - \frac{a}{2}\right) \frac{a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}} = \frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

Задача 4 (МФТИ, 1965). В данную правильную усеченную треугольную пирамиду с боковым ребром b можно поместить сферу, касающуюся всех граней, и сферу, касающуюся всех ребер. Найти стороны оснований пирамиды.

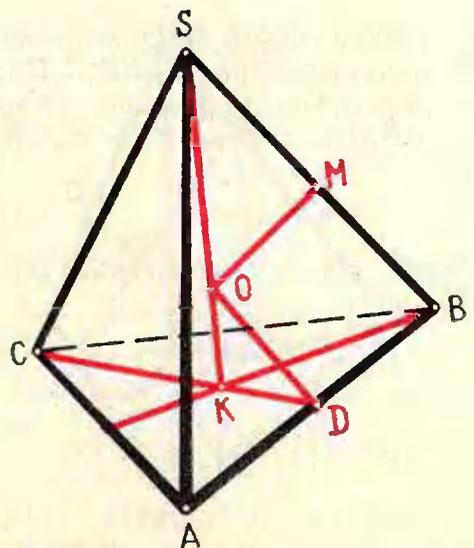


Рис. 2.

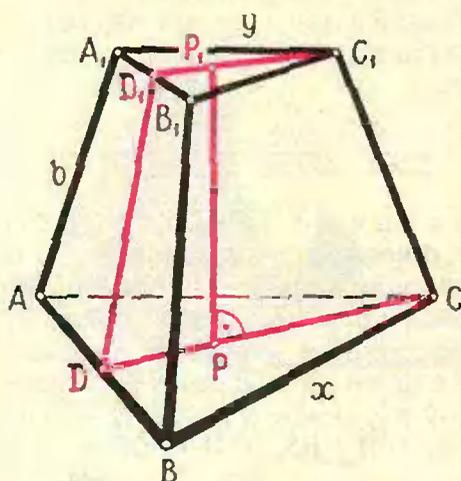


Рис. 3.

Решение. Пусть P и P_1 — центры оснований данной усеченной пирамиды, DD_1 — ее апофема (рис. 3). Обозначим стороны оснований через x и y . Из трапеции AA_1D_1D находим

$$DD_1^2 = b^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2.$$

Сфера, вписанная в пирамиду, касается оснований пирамиды в точках P , P_1 и касается апофемы DD_1 (докажите!). Следовательно,

$$DD_1 = PD + P_1D_1 = \frac{x+y}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$b^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = \frac{1}{12}(x+y)^2. \quad (2)$$

В сечении сферы, касающейся всех ребер пирамиды, гранью BB_1C_1C получается окружность, вписанная в трапецию BB_1C_1C . Значит, $BC + B_1C_1 = BB_1 + CC_1$,

$$x + y = 2b. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и (3), находим

$$x = b \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right),$$

$$y = b \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

Задача 5 (МФТИ, 1968). Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды,

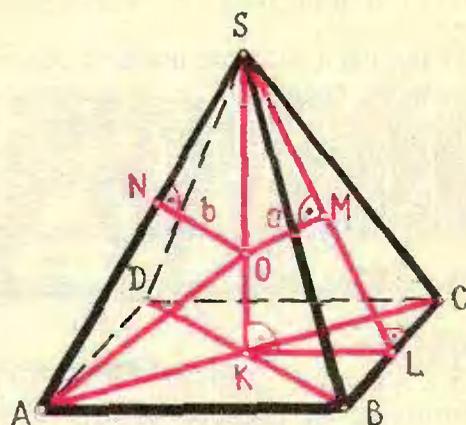


Рис. 4.

находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Найти радиус сферы.

Решение. Пусть O — центр сферы, описанной около пирамиды $SABCD$ (рис. 4), $OS = OA = R$ — радиус этой сферы, SK — высота пирамиды. Проведем $SL \perp BC$, $OM \perp SL$, $ON \perp AS$. По условию задачи $OM = a$, $ON = b$ (докажите!).

Так как $\triangle SOM \sim \triangle SKL$ и $\triangle SON \sim \triangle ASK$, то

$$\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{KL}{SK},$$

$$\frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{AK}{SK} = \frac{\sqrt{2}KL}{SK}.$$

Отсюда находим

$$\frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - a^2}},$$

$$R = \frac{ab}{\sqrt{2a^2 - b^2}}.$$

Задача 6 (МФТИ, 1971). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна b , а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается грани ACD в точке K . Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB .

Решение. Пусть DO — высота пирамиды (рис. 5). Точка K лежит на

высоте DL треугольника ACD (докажите!). Сечением пирамиды данной плоскостью является равнобедренный треугольник ABM (докажите!). Найдём его боковую сторону AM .

Обозначим $\angle CAM$ через α , $\angle ACM$ через β . Заметим, что $LK = LO = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ как две касательные к вписанной в пирамиду сфере, проведенные из точки L (докажите!). Значит,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KL}{AL} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Из прямоугольного треугольника ODL находим

$$DL = \sqrt{OD^2 + OL^2} = \frac{5b}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{CL}{DL} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Теперь из треугольника ACM по теореме синусов получаем

$$\begin{aligned} AM &= \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{b}{\sin \alpha \operatorname{ctg} \beta + \cos \alpha} = \frac{5b}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Наконец, находим площадь равно-

бедренного треугольника ABM :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \times \\ &\times \sqrt{AM^2 - \frac{1}{4} AB^2} = \frac{\sqrt{219}}{36} b^2. \end{aligned}$$

Задача 7 (МФТИ, 1971). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . На ребрах AB и CD расположены соответственно точки E и F . Прямая EF пересекает описанную около тетраэдра сферу в точках M и N так, что $ME : EF : FN = 3 : 12 : 4$. Найдите длину EF .

Решение. Обозначим EF через x , FC через y , BE через z (рис. 6). Найдём соотношение между x , y , z и a .

Из точки F опустим перпендикуляр FL на плоскость треугольника ABC . Так как тетраэдр правильный, то точка L лежит на высоте CK треугольника ABC .

Из прямоугольного треугольника CFL , учитывая, что $\angle KCD = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ (проверьте!), находим

$$CL = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad FL = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Так как } KL = KC - CL = \frac{a\sqrt{3}}{2} -$$

$\frac{y}{\sqrt{3}}$, а $KE = \left| \frac{a}{2} - z \right|$, то из прямоугольного треугольника KLE полу-

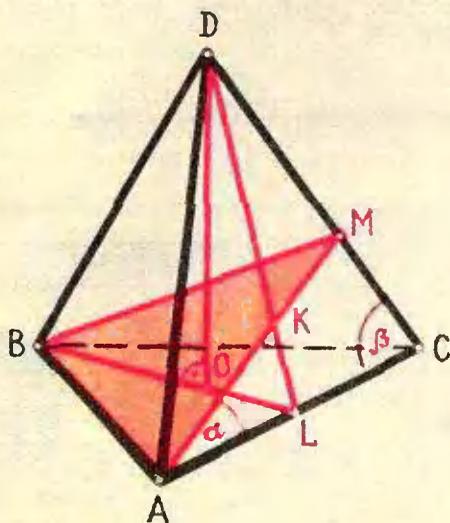


Рис. 5.

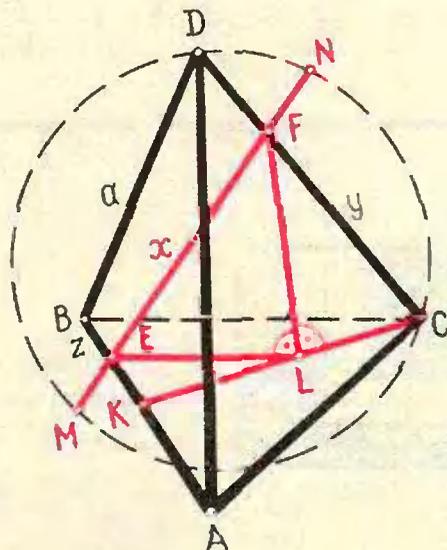


Рис. 6.

чаем $EL^2 = KL^2 + KE^2 = a^2 + \frac{1}{3}y^2 + z^2 - ay - az$.

Теперь из прямоугольного треугольника EFL находим $EF^2 = FL^2 + EL^2$, то есть

$$x^2 = a^2 - y(a - y) - z(a - z). \quad (4)$$

Последнее соотношение само по себе достаточно интересно и может быть использовано при решении других задач.

Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые EF и CD . Эта плоскость пересекает описанную около тетраэдра сферу по окружности, которая указана на рисунке 6. Для этой окружности отрезки MN и CD являются хордами, пересекающимися в точке F . Следовательно,

$$CF \cdot DF = MF \cdot NF$$

(докажите!), то есть

$$y(a - y) = \frac{5}{12}x^2. \quad (5)$$

Аналогично, из равенства

$$AE \cdot BE = ME \cdot NE$$

получаем

$$z(a - z) = \frac{1}{3}x^2. \quad (6)$$

Из соотношений (4), (5) и (6) находим

$$x^2 = a^2 - \frac{5}{12}x^2 - \frac{1}{3}x^2, \quad x = \frac{2a}{\sqrt{7}}.$$

1. (МФТИ, 1966). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающейся построенной сферы.

2. (МФТИ, 1966). Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены две сферы радиусов $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем одна сфера вписана в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A , а другая — в трехгранный угол с вершиной в точке B . Найти длину ребра этого тетраэдра.

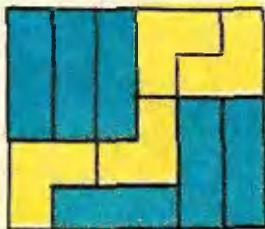
3. (МФТИ, 1967). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна a , высота пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Точки M , N и K являются серединами соответственно боковых ребер AS , BS и CS . Найти радиус сферы, касающейся основания пирамиды и прямых AK , CN и BM .

4. (МФТИ, 1968). В правильной шестиугольной пирамиде вписанная сфера проходит через центр описанной. Во сколько раз радиус описанной сферы больше радиуса вписанной?

5. (МФТИ, 1968). Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, находится на расстоянии $\sqrt{2}$ см от бокового ребра и на расстоянии $\sqrt{5}$ см от стороны основания. Найти радиус шара.

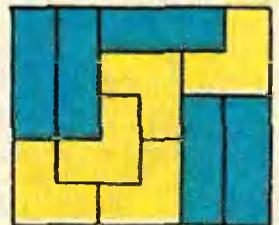
6. (МФТИ, 1969). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . Найти радиус сферы, проходящей через вершины A , B , середину ребра CD и центр грани ABC .

7. (МФТИ, 1971). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна b , а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в эту пирамиду, касается боковой грани SAD в точке K . Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB .



К задаче М86.

Утверждение становится неверным. На левом рисунке четыре уголка, а на правом — пять.



ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Отделение экономической кибернетики экономического факультета

1. Произведено два типа деталей. Первая деталь изготовлялась из сплава металлов M_1 и M_2 , а вторая деталь — из сплава металлов M_3 и M_4 . Если бы детали первого типа были сделаны только из металла M_1 , то их общий вес был бы 1,6 кг, а если бы только из металла M_2 , то 5,2 кг. Если бы детали второго типа были сделаны только из металла M_3 , то их общий вес был бы 3 кг, а если бы только из металла M_4 , то 4,5 кг. Стоимость одной детали первого типа — 3 рубля, ее вес 0,31 кг. Стоимость одной детали второго типа 5 рублей, ее вес 0,34 кг. Сколько произведено деталей каждого типа, если их общая стоимость равна 68 рублям?

2. Решить уравнение:

$$\lg(\pi \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \lg x).$$

3. Найти минимальный член последовательности

$$a_n = n^2 - 8n + 15 - \frac{9}{(3n - 16)^2 + 6},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

4. На плоскости лежат прямой круговой цилиндр радиуса R (то есть цилиндр касается плоскости по некоторой образующей) и, не пересекаясь с ним, шар радиуса r . Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно ρ . Найти минимально возможный радиус шара, который касался бы одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

5. Сколько существует шестизначных чисел, у которых на каждом четном месте стоит цифра, на единицу большая, чем слева от нее (разряды нумеруются слева направо)?

Отделение политической экономии экономического факультета

1. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на $P\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый

год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на $48,59\%$.

2. Решить неравенство:

$$x > \frac{1}{x-1}.$$

3. Решить неравенство:

$$11 \sin x + \cos 2x - 6 \leq 0.$$

4. Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 13.

5. В двугранный угол 60° вписан шар радиуса R . Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол 45° .

Отделение биологии биолого-почвенного факультета

1. Решить уравнение:

$$\log_{\frac{1}{8}} \left[2^{x+1} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} \right] + \log_{\frac{1}{8}} \left[2^x + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} \right] = \frac{5}{3} + 3 \log_{\frac{1}{8}} 5.$$

2. Усеченный конус и правильная шестиугольная призма расположены так, что верхнее основание усеченного конуса вписано в верхнее основание призмы, а нижнее основание усеченного конуса описано около нижнего основания призмы. Известно, что высота усеченного конуса равна сумме радиусов его оснований. Найти отношение величин боковых поверхностей этих тел.

3. Смешав по 2 см^3 трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго из этих веществ занимают объем на $\frac{1}{2} \text{ см}^3$

большой, чем 4 г третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого вещества.

4. Решить неравенство:

$$\cos 6x - \frac{5}{2} < 2\sqrt{3} \sin 3x.$$

5. Биссектриса AE угла A пересекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB=BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD , в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE . Найти отношение периметров треугольников ABE и ECD .

**Географический факультет
и отделение почвоведения
биолого-почвенного факультета**

1. Работая одновременно на трех станках, за 7 часов обрабатывают 343 детали. За 2 часа на первом и втором станках вместе можно обработать столько же деталей, сколько на третьем станке за 5 часов. За 3 часа на первом станке можно обработать на 10 деталей больше, чем за 2 часа на втором станке. Сколько деталей в час можно обработать на первом станке?

2. Упростить выражение:

$$(a-b) \left[\frac{a^{\frac{1}{4}}}{(1+b^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})} - \frac{b^{\frac{1}{4}}}{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+1)} - 2a^{\frac{1}{4}} \right].$$

3. Решить уравнение:

$$8 \cos x - 4 \cos^3 x - 5 \sin 2x = 0.$$

4. В треугольнике ABC дано: $AB = \sqrt{14}$, $BC=2$. Окружность, проходящая через точку B , середину D отрезка BC и касающаяся стороны AC , пересекает отрезок AB в точке E . Найти отношение, в котором эта окружность делит отрезок AB , если DE — диаметр этой окружности.

5. Решить неравенство:

$$\log_3(x-3) + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \log_3(2x^2 - 6x + 7).$$

Московский автомобильно-дорожный институт

В а р и а н т 1

1. Выполнить действия и упростить:

$$\frac{(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 + (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}.$$

2. Груз массой в 60 кг производит давление на опору. Если массу груза уменьшить на десять килограммов, а площадь опоры уменьшить на 5 дм², то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Определить площадь опоры.

3. Решить уравнение:

$$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$$

4. Решить уравнение:

$$\cos 3x = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right).$$

5. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

В а р и а н т 2

1. Вычислить при $y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ выражение

$$\frac{(1-y)(y+2)}{y^2(1+y)^2}.$$

2. Мне было дано пятизначное число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученный результат утроить. Вместо этого я приписал к цифровой части заданного числа справа цифру 2 и получил правильный ответ. Какое число было задано?

3. Решить уравнение:

$$\frac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - \log_3 x + \log_3^2 x = 3.$$

4. Решить уравнение:

$$(\cos 6x - 1) \operatorname{ctg} 3x = \sin 3x.$$

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см². Найти площадь описанного круга.

О книжке Пойя «Математическое открытие»

Автора этой книги читатели нашей страны знают давно. Еще в 1937—1938 гг. вышли его, совместно с Г. Сеге, двухтомные «Задачи и теоремы из анализа», в 1957 году — «Математика и правдоподобные рассуждения», в 1961 году — «Как решать задачу». В предисловии к последней книге Д. Пойя писал: «Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия». И далее: «Автор ставит себя иногда в положение ученика, иногда — в положение учителя... Однако, чаще всего... автор рассуждает с точки зрения лица, не являющегося ни учителем, ни учеником, а просто заинтересованного в решении стоящей перед ним задачи». Это «третье лицо» и есть, конечно, сам автор, известный ученый — математик. Что же касается исполнения им «по совместительству» двух других упомянутых ролей, то оно представляется не просто удачной литературной и педагогической находкой. Такое «совместительство» есть важнейшая составная часть творческого кредо Дьердя Пойя, которое он исповедует с редкостным постоянством.

В своей книге «Математическое открытие» Пойя продолжает и развивает мысли, высказанные в более ранних книгах (хотя ни одна из них не требует предварительного знакомства с другими — в этом лишний раз сказывается педагогическая искусственность автора). Верный своим принципам, Пойя не столько рассказывает о решении задач, сколько

показывает, как это делается. И, конечно, приглашает следовать за ним. А затем и в самостоятельный путь. «Решение задач — практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь. И в этой книге вы не найдете волшебного ключа, открывающего все двери. — она не научит вас решать все задачи, но даст вам много хороших образцов для подражания и возможностей поупражняться. Но помните: если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!». Книга буквально напичкана интересными задачами и не менее интересными пояснениями к их решению. Соблазнительно, что и говорить, было бы попытаться дать в рецензии хоть какое-нибудь представление об этих задачах. Но такая попытка неминуемо обеднила бы и тем самым исказила представление о всей книге в целом. Посудите сами: содержание романа, даже очень большого, можно пересказать на пяти, ну, на десяти страницах. А как быть со сборником из тысячи небольших стихотворений? Привести целиком десяток лучших? Два десятка? А если все хороши? Да и кто поручится за объективность выбора?

Поэтому мы ограничимся тем, что перепечатаем без всяких изменений, без всяких сокращений и без всяких комментариев один параграф из книги Пойя. Мы вовсе не утверждаем,

что это самый лучший параграф. Или самый типичный, что ли. Просто нам он очень нравится. И очень хочется, чтобы его предельно проникся читатель. А если он сам найдет потом в книге что-либо, что понравится ему больше — не беда. Во всяком случае, сам Пойя меньше всего хотел бы воспитать своих учеников в полном единодушии и единообразии вкусов. Уж в этом-то ничего хорошего нет.

Прекрасно понимая, что простое перечисление названий глав книги Пойя способно озадачить читателя еще больше, чем ее интригующее название, мы тем не менее (а может быть, именно поэтому) не откажем себе в этом удовольствии: «Метод двух геометрических мест», «Метод Декарта», «Рекурсия», «Суперпозиция», «О задачах», «Расширение области применения метода», «Геометрическое представление процесса решения», «План и программа», «Задачи внутри задач», «Зарождение идеи», «Умственная работа», «Дисциплина ума», «Законы открытия», «Об учении, преподавании и обучении преподаванию», «Догадка и научный метод».

Ну что, не все здесь понятно? Ничего, это значит, что вам пора приниматься за «Математическое открытие». (Не забудьте заглянуть в бумагой и карандашами!). А если книги этой у вас еще нет, прочтите для начала хотя бы следующий отрывок из нее.

* * *

Я позволю себе вольность и попытаюсь проделать небольшой эксперимент над читателем. Я сформулирую про-

стью, но не слишком избыточную геометрическую задачу, а затем попробую воссоздать последовательность идей, ведущих к ее доказательству. Я намерен продвигаться вперед медленно, очень медленно, выдавая последовательно секреты один за другим, причем каждый из этих секретов выдавая не сразу, а постепенно. Я надеюсь, что прежде, чем рассказ будет полностью доведен до конца, читатель сможет уловить главную идею если, конечно, что-нибудь не помешает этому, и так как эта идея окажется несколько неожиданной, то он сможет испытать удовлетворение от своего небольшого открытия.

А. Если три окружности одного радиуса проходят через одну точку, то тот же радиус имеет и окружность, проходящая через остальные три точки их пересечения.

Это и есть та теорема, которую нам нужно доказать. Утверждение теоремы коротко и ясно, но в нем как будто не хватает деталей. Сделаем чертеж (рис. 1) и введя подходящие обозначения, мы приходим к следующему, более подробному варианту задачи:

Б. Три окружности k, l, m одного радиуса r проходят через точку O . Окружности l и m пересекаются в точке A , m и k — в точке B , k и l — в точке C . Требуется доказать, что радиус окружности e , проходящей через точки A, B и C , также равен r .

На рисунке 1 изображены четыре окружности k, l, m и e и четыре точки их пересечения. Однако эта фигура может показаться неудовлетворительной, потому что она не так уж проста и в то же время неполна; создается впечатление, что на ней что-то отсутствует; кажется, что нечто существенное не принято во внимание.

Мы имеем сейчас дело с окружностями. Что представляет собой окружность? Всякая окружность определяется местоположением ее центра и величиной ее радиу-

са: все точки окружности находятся на одинаковом (и равном радиусу) расстоянии от центра. Но мы забыли ввести в рассмотрение этот общий всем четырем окружностям радиус r ; таким образом, мы не принесли во внимание существенную часть условия. Обозначим поэтому прежде всего центры наших окружностей: K для окружности k , L для окружности l и M для окружности m . В каком теперь месте лучше всего провести радиус r ? По-видимому, нет смысла отдавать предпочтение какой-то одной из трех данных окружностей k, l и m или какой-нибудь одной из трех точек их пересечения A, B и C .

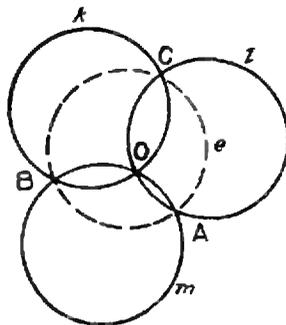


Рис. 1.

Поэтому соединим, пожалуй, каждый из трех центров со всеми тремя точками пересечения, принадлежащими соответствующей окружности: K с B, C и O , и так далее.

Получающаяся фигура (рис. 2) оказывается обескураживающе перегруженной. На ней столько линий — прямых и кривых, — что ее невозможно как следует «охватить взором»; она «не хочет стоять на месте». Эта фигура может напомнить некоторые рисунки, знакомые нам по старинным журналам, — такой рисунок намеренно делался неопределенным: если смотреть на него как обычно, то на нем видна одна фигура; если же повернуть журнал, придав ему специально выбранное положение, и рассматривать ри-

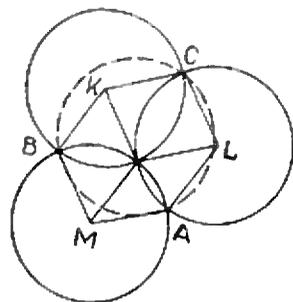


Рис. 2.

сунк под определенным углом, то внезапно возникает другая фигура, поражающая вас как более или менее остроумный комментарий к первой. Можете ли вы распознать на нашей запутанной фигуре, перегруженной прямыми и окружностями, какую-нибудь другую, возможно, полезную для наших целей фигуру?

На эту нужную нам фигуру, скрывающуюся за переплетением линий нашего перегруженного деталями рисунка, мы можем либо напасть сразу, либо распознавать ее постепенно. К искомой фигуре нас могут привести те усилия, которые мы предпринимаем для решения предложенной задачи, или какое-нибудь второстепенное, несущественное обстоятельство. Так, например, когда мы были заняты перечислением нашей несовершенной фигуры, мы могли заметить, что вся фигура целиком определяется входящей в ее состав «прямолинейной» (составленной из отрезков) частью (рис. 3).

Последнее обстоятельство кажется нам важным. Оно существенно упрощает геометрию рисунка и, возможно, проясняет логическую сторону дела. И оно приводит к следующей измененной формулировке нашей теоремы:

В. Если каждый из девяти отрезков

$KO, KC, KB,$
 $LC, LO, LA,$
 MB, MA, MO

равен r , то существует точка E такая, что каждый из от-

резков

EA, EB, EC

также будет равен r .

Последнее утверждение привлекает наше внимание к рисунку 3. Этот рисунок чем-то примечателен; он напоминает нам что-то знакомое. (Что именно?)

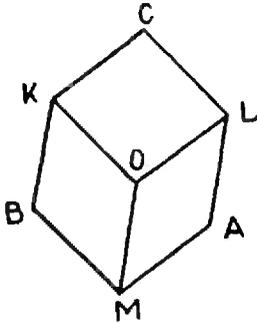


Рис. 3.

Конечно, у любого из четырехугольников, изображенных на рисунке 3, например у четырехугольника $OLAM$, все четыре стороны по условию равны друг другу, то есть все эти четырехугольники — ромбы.

Ромб — хорошо знакомая нам фигура; выделив его мысленно на нашем рисунке, мы можем «видеть» всю фигуру лучше. (Что напоминает вам эта фигура в целом?)

Противоположные стороны ромба параллельны. Основываясь на этом обстоятельстве, можно разбить 9 отрезков, из которых составлена фигура, изображенная на рисунке 3, на три группы,

в каждую из которых входят только параллельные друг другу отрезки; например, в одну из таких групп отрезков войдут отрезки AL, MO и BK . (Что может напомнить нам эта фигура теперь?)

Мы не должны забывать цели, к которой стремимся. Допустим, что заключение нашей теоремы справедливо. Наносим на рисунок центр E окружности e и три ее радиуса, оканчивающихся в точках A, B и C (рис. 4), мы (предположительно) получаем новые ромбы, новые параллельные отрезки. (Что напоминает нам вся фигура в целом теперь?)

Ну, конечно, рисунок 4 представляет собой проекцию

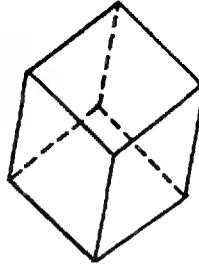


Рис. 4.

12 ребер параллелепипеда, расположенного таким образом, что все эти проекции имеют одинаковую длину.

Рисунок 3 является проекцией «непрозрачного» параллелепипеда: мы видим только 3 его грани, 7 вершин и 9 ребер, в то время как 3

грани, 1 вершина и 3 ребра на рисунке не видны. Этот рисунок является частью рисунка 4, но такой частью, которая определяет всю интересующую нас фигуру. Если параллелепипед и направление проектирования выбраны так, что проекции девяти ребер, изображенных на рисунке 3, равны r (т. е. так, какими они и должны быть по условию задачи), то проекции трех оставшихся ребер также должны быть равны r . Из проекции E восьмой, невидимой вершины исходят три отрезка длиной r , а сама эта проекция является центром окружности, проходящей через точки A, B и C , радиус которой равен r .

Наша теорема доказана, причем доказана при помощи неожиданной остроумной идеи, заключающейся в том, что мы рассматриваем плоскую фигуру как проекцию пространственной фигуры.

(В этом доказательстве используются стереометрические понятия. Мне кажется, что беда здесь невелика, тем более, что она легко поправима. В самом деле, поскольку мы теперь знаем, что положение центра E может быть охарактеризовано весьма просто, длины отрезков EA, EB и EC можно ввести в рассмотрение, не прибегая ни к какой стереометрии. Однако мы не будем настаивать здесь на этой точке зрения.)

М. Л. Смолянский,
Ю. А. Гастев



МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕЖДУНАРОДНЫМ ГЕОФИЗИЧЕСКИМ НАУЧНЫМ ПРОГРАММАМ

Геофизика — наука о физических процессах, протекающих на Земле, — включает в себя также исследование разнообразных явлений, наблюдаемых в различных слоях атмосферы, в водной оболочке, твердой земной коре и недрах нашей планеты. Геофизические явления часто охватывают большую часть земного шара или весь земной шар. Поэтому еще на заре развития геофизики стала ясно необходимость объединения усилий ученых разных стран для проведения исследований по единой программе в различных точках земного шара.

В октябре 1951 г. Международный Совет научных союзов решил провести Международный геофизический год. С 1 июля 1957 года по 31 декабря 1958 года ученые многих стран по специальной программе выполнили огромное количество согласованных исследований во всех районах земного шара. Международный геофизический год был крупнейшим научным мероприятием, в котором приняло участие более 50 тысяч ученых из 60 стран.

Самой новой и самой трудной задачей в это время явился запуск искусственных спутников Земли. Поэтому на эмблеме Международного геофизического года изображен земной шар с пролетающим вокруг него искусственным спутником.

В Советском Союзе выпущены три серии марок, посвященных Международному геофизическому году.



Они отображают важнейшие исследования, которые проводились в СССР по международной программе. На одной из марок первой серии (выпуск 1957 г.) изображен хромосферно-фотографический телескоп для изучения солнечной активности, на другой — обсерватория и радарная установка для наблюдения за метеоритами и на третьей — запуск ракеты для исследования верхних слоев атмосферы.

Вторая серия (выпуск 1958 г.) посвящена изучению геомагнетизма, полярных сияний и метеорологии.

В третьей серии вы видите марку с изображением советского научно-исследовательского судна «Витязь», изучающего разнообразные явления в океанах [в верхней части марины показан маршрут «Витязя» в Индийском океане], марку, посвященную гляциологии (изучение ледяного покрова Земли), а также марку, посвященную исследованию Антарктиды со схемой расположения советских антарктических станций. В этой же серии была выпущена марка, посвященная ракетным исследованиям. На всех четырех марках последней серии изображена эмблема Международного геофизического года.

А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задаче М84

Проективную прямую, дополненную бесконечно удаленной точкой, естественно представлять себе как окружность (когда точка X пробегает прямую, то X' проходит полный оборот по окружности).

Если точка X движется в одну сторону, то $Y=f(X)$ — в противоположную, поэтому отображение f имеет две неподвижные точки Z_1 и Z_2 такие, что $f(Z_1)=Z_1$; $f(Z_2)=Z_2$. (Это верно для любого непрерывного взаимно однозначного отображения f окружности на себя, меняющего направление обхода).

Если точка L — бесконечно удаленная точка прямой l , то, как нетрудно проверить, $f(f(L))=L$, причем $f(L) \neq L$. Отображение $X \rightarrow f(f(X))$ проективное и имеет три неподвижные точки: Z_1 , Z_2 и L , поэтому $f(f(X))=X$ для всех X .

К статье «Пирамида и сфера»

1. $\frac{a}{8}(\sqrt{6} \pm 1)$. 2. $(5\sqrt{6} + \sqrt{22})R$.
 3. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. 4. $1 + \sqrt{\frac{7}{3}}$. 5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см.
 6. $\frac{3\sqrt{6}}{8}a$. 7. $\frac{3\sqrt{17}}{16}b^2$.

К «Вариантам вступительных экзаменов»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Отделение экономической кибернетики
экономического факультета

1. 6 деталей первого типа и 10 деталей второго типа.

Указание. Если число произведенных деталей первого и второго типа обозначить через x и y соответственно, то $3x + 5y = 68$. Если бы детали первого типа изготавливались из металла M_1 , то каждая деталь весила бы $1,6/x$ кг, а если бы из металла M_2 , то $5,2/x$ кг. Так как на самом деле каждая деталь первого типа весит 0,31 кг и изготавливается из сплава металлов M_1 и M_2 , то $1,6/x < 0,31 < 5,2/x$ (почему?), то есть $5 \frac{5}{31} < x <$

$< 16 \frac{24}{31}$. Аналогично получаем, что $8 \frac{14}{17} < y < 13 \frac{4}{17}$. Таким образом, задача сводится к отысканию таких целых значений x и y , которые удовлетворяют уравнению

$3x + 5y = 68$ и условиям $6 \leq x \leq 16$, $9 \leq y \leq 13$. Это уже легко сделать прямым перебором, если переписать уравнение в виде $x = \frac{68 - 5y}{3}$ и последовательно придавать y значения 9, 10, 11, 12, 13.

2.

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1 + 2k \pm \sqrt{(1 + 2k)^2 - 16}}{4} + n\pi,$$

где n — целое число, а k — целое число, за исключением $k = -2, -1, 0, 1, 2$, и

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + m\pi, \quad \text{где } m \text{ — целое число.}$$

Указание. Уравнение приводится к виду

$$\cos(\pi \operatorname{tg} x + \pi \operatorname{ctg} x) = 0,$$

или

$$\pi \operatorname{tg} x + \pi \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, для каждого целого k нужно найти все решения уравнения $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} + k$, а затем отобрать из них те, которые входят в ОДЗ исходного уравнения (ОДЗ описывается условиями:

$$x \neq p\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + q\pi, \quad \pi \operatorname{tg} x \neq \frac{\pi}{2} + r\pi,$$

$\pi \operatorname{ctg} x \neq s\pi$, p, q, r, s — целые числа).

Если обозначить $\operatorname{tg} x$ через z , то приходим к квадратному уравнению $z^2 - \left(-\frac{1}{2} + k\right)z + 1 = 0$; оно имеет два действительных корня при каждом целом $k \neq -2, -1, 0, 1$. При $k = 2$ один из корней придется отбросить, так как он не входит в ОДЗ.

$$3. a_4 = -\frac{31}{22}.$$

Указание. Представим общий член последовательности в виде $a_n = f(n) + g(n)$, где

$$f(n) = n^2 - 8n + 15,$$

$$g(n) = -\frac{9}{(3n - 16)^2 + 6}.$$

Из свойств квадратного трехчлена следует, что функция $f(x) = x^2 - 8x + 15$ возрастает при $x \geq 4$, а функция $g(x) = -\frac{9}{(3x - 16)^2 + 6}$ возрастает при $x \geq 5 \frac{1}{3}$ (докажите!). Поэто-

му при $n \geq 6$ общий член a_n последовательности как сумма двух возрастающих выражений будет возрастать с ростом номера n . Следовательно, наименьший член последовательности надо искать среди членов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Это можно сделать прямым перебором.

$$4. \frac{\rho^2 - (R-r)^2}{4(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}.$$

Указание. Доказать, что центр искомого шара лежит в плоскости, проходящей через центр данного шара и перпендикулярной к оси цилиндра.

5. 648 чисел.

Отделение политической экономии экономического факультета

1. 17%.

$$2. \frac{-\sqrt{5}+1}{2} < x < 1, x > \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$3. \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

4. 462462.

$$5. \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1} R \text{ и } \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1} R.$$

Указание. Обратит внимание, что существуют два шара, удовлетворяющих требованиям задачи.

Отделение биологии биолого-почвенного факультета

$$1. x = -3. \quad 2. \pi \sqrt{14}:12. \quad 3. 4 \text{ г/см}^3.$$

4. $x \neq (-1)^{n+1} \frac{\pi}{9} + \frac{n\pi}{3}$, где n — любое целое число. 5. 3:1. Указание. Пусть p_1, p_2 — периметры треугольников ABE и ECD соответственно, а $\angle BAE = \alpha$. Показать, что $p_1:p_2 = \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) : \cos \alpha$. Установить далее, что $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$.

Географический факультет

1. 16 деталей. 2. $a+b$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, где k и n — любые целые числа. 4. $AE:EB =$

$=4:3$. Указание. Доказать, что $\angle ABC = 90^\circ$. Воспользоваться далее теоремой: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть. 5. $3 < x < 10$.

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

Вариант I

$$2. 15 \text{ дж}^2. \quad 3. x = 1/12. \quad 4. x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi. \quad 5. 5 \text{ см.}$$

Вариант 2

$$1. 12. \quad 2. 85714. \quad 3. 1/3; \quad 9. \quad 4. x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3} k\pi. \quad 5. 25 \text{ л.}$$

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 1, 3-я стр. обложки)

1. Ясно, что если пробка заворачивается так, что человек должен нажимать на ключ сверху вниз, то максимальная сила, с которой он может давить на ключ, равна его весу. Однако в том случае, когда ключ должен идти от пола вверх, эта сила может быть значительно больше веса: сильный человек может легко поднять груз, значительно превышающий его собственный вес.

2. 24-мя нулями.

3. Лампочки одинаковой мощности нужно соединить параллельно между собой и затем получившиеся две группы лампочек соединить последовательно.

4. 24 суток.

5. У утки лапы расставлены шире, чем у курицы. Поэтому ее центр тяжести находится дальше от точки опоры, и за время шага, который у утки и курицы примерно одинаков, утка поворачивается на больший угол, чем курица: больше момент силы тяжести относительно точки опоры, и поэтому больше ускорение и угловая скорость вращения.

6. Кирпич обладает большей теплопроводностью, чем дерево. При потеплении поверхность деревянной стенки быстро становится теплой. Кирпичная стенка, «накопившая холод», передает его наружу, и ее температура оказывается ниже 0°C , то есть ниже температуры окружающего воздуха.

КВАНТ

для младших школьников

1. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Куда налита каждая жидкость?

2. На рисунке изображена мишень. Куда надо попасть и сколько выстрелов сделать, чтобы выбить на ней ровно 100 очков?

3. Найти цифры x и y пятизначного числа $42x4y$, если известно, что это число делится на 72.

4. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых ее нет?

5. Дан квадрат размером 5×5 , в котором записаны 25 чисел (см. рисунок). Выберем одно из чисел (произвольно), обведем его, а остальные числа, стоящие в том же столбце и в той же строке, зачеркнем. Затем выберем одно из оставшихся чисел, обведем его, а остальные числа в тех же строке и столбце зачеркнем. Так сделаем пять раз.

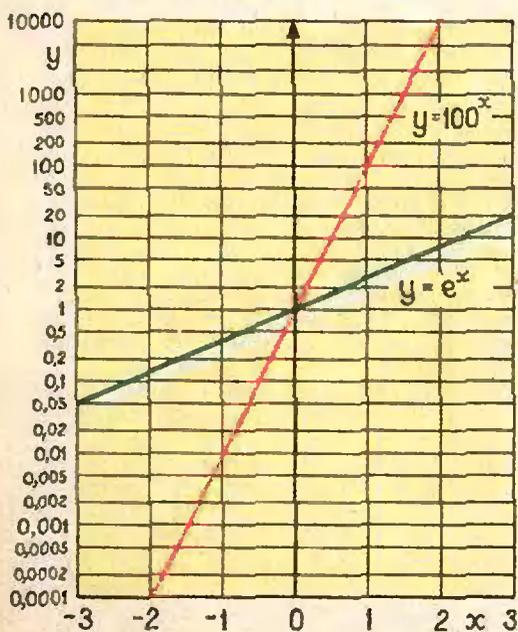
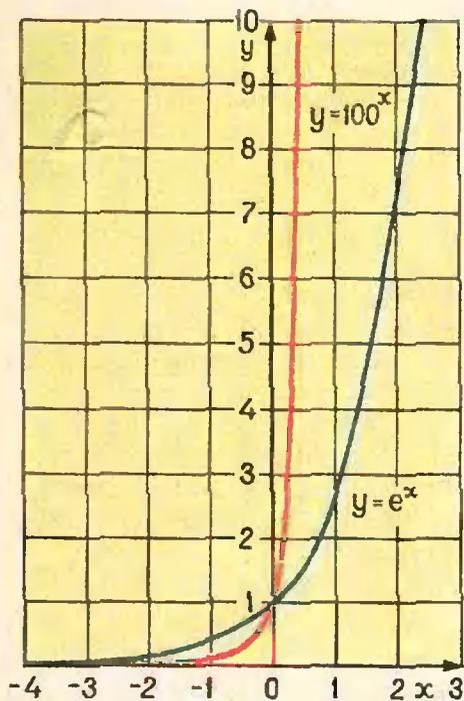
Возьмем сумму обведенных чисел. Оказывается, как бы мы ни выбирали числа, эта сумма всегда равна 56. Попробуйте разгадать это таинственное свойство приведенного квадрата.

А. П. Савин
В. М. Розентуллер

$42x4y$

72

4	0	8	12	2
7	3	11	15	5
10	6	14	18	8
13	9	17	21	11
16	12	20	24	14



ГРАФИКИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

На четвертой странице обложки первого номера нашего журнала за 1972 год помещена заметка «Коротко об экспоненте». Там сказано, что многие величины изменяются во времени так, что скорость их изменения пропорциональна достигнутому ими значению. Общая форма такого рода показательной зависимости величины y от времени t записывается так:

$$y = y_0 a^t,$$

где y_0 — значение величины y при $t=0$.

Поэтому важно уметь вычислять и изображать графически показательные функции

$$y = a^t$$

при разных основаниях a .

Для вычисления этих функций можно воспользоваться формулой

$$y = 10^{kt}, \text{ где } k = \lg a.$$

Таблица функции $y = 10^x$ есть в сборнике таблиц Брадиса.

На верхнем рисунке слева изображены графики функций

$$y = e^x (e = 2,71\dots) \text{ и } y = 100^x.$$

Вы видите, что они очень быстро уходят вверх при возрастании x и на графике не отличаются от нуля при отрицательных x достаточно больших по абсолютной величине.

Существует, однако, замечательный способ графического изображения показательных функций на полулогарифмической бумаге (она продается в магазинах). Такое изображение наших двух функций дано на нижнем рисунке. Графики показательных функций на полулогарифмической бумаге оказываются прямыми. Как устроена эта бумага, можно понять из рисунка. Подробная статья о показательных функциях и точное описание полулогарифмической сетки будут даны в одном из ближайших номеров нашего журнала.